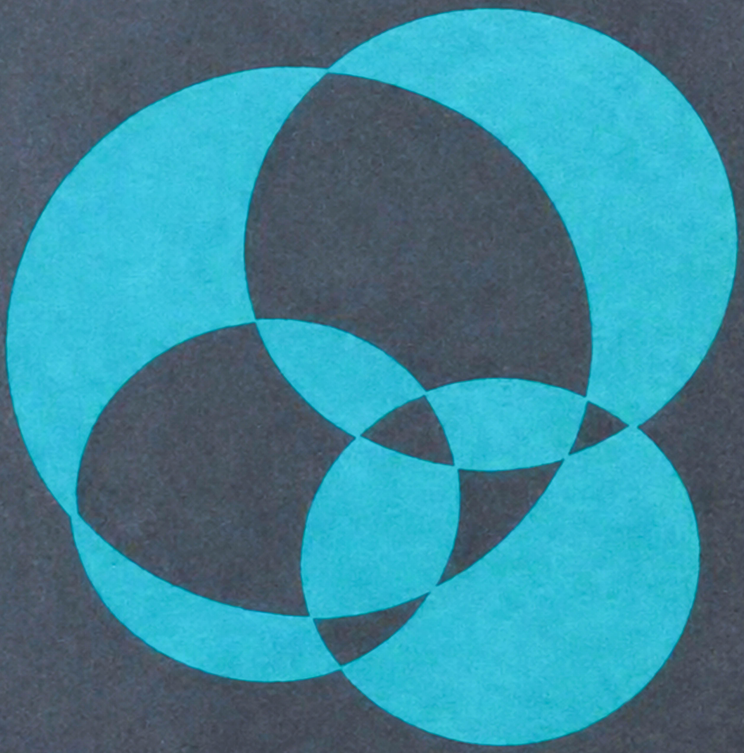
К. У. Шахно

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ



К. У. ШАХНО

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Издание 5-е, стереотипное

Издательство «Вышэйшая школа»
Минск 1969

Шахно К. У.

Ш31 Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Изд. 5-е, стереотипное. Минск, «Вышэйш. школа», 1969 г.

478 с. с илл. 50 000 экз. 95 к.

Сборник содержит свыше тысячи задач по элемеитарной математике, главным образом повышеиной трудности. Задачи, по возможности, систематизированы и снабжены решениямн. В отдельных случаях в связи с решеиием задачи и там, где это уместно, приведены вопросы теории. Иногда они предпослаиы решению группы задач, объединенных общей идеей. Даиы разъясиения по вопросам теории равиосильности уравиений, построения графиков, комплексных чисел, обратных тригонометрических функций, математической индукции и некоторым другим вопросам.

Сборник рассчитан на лиц, окончивших среднюю школу и желающих продолжать совершенствоваться в методах решения задач или готовиться в вуз. Он может послужить дополнительным пособием учителю при работе в классе, для индивидуальных заданий учащимся, особо интересующимся математикой, студентам педагогических институтов.

2-2-2
-69

51(076)

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Преобразование алгебраических выражений . 3
II. Алгебраические уравнения 15
III. Составление уравнений 25
IV. Прогрессии 34
V. Логарифмы 38
а) Общие свойства логарифмов 38
б) Логарифмические и показательные уравнения 39
VI. Соединения и бином Ньютона 42
VII. Преобразование тригонометрических выражений 45
VIII. Тригонометрические уравнения 54
IX. Неравенства 57
X. Комплексные числа 63
XI. Математическая индукция 66
XII. Исследование функций и построение графиков 68
XIII. Геометрические задачи на плоскости (Планиметрия) 71
XIV. Геометрические задачи в пространстве (Стереометрия) 80

ЗАДАЧИ

I.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Разложить на множители (1—15):

1. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.
2. $a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+c^2a^2(a-c)$.
3. $[(x^2+y^2)(a^2+b^2)+4abxy]^2-4[xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2)]^2$.
4. $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc$.
5. $y(x-2z)^2+8xyz+x(y-2z)^2-2z(x+y)^2$.
6. $8x^3(y+z)-y^3(z+2x)-z^3(2x-y)$.
7. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$.
8. $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz$.
9. $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$.
10. x^3+5x^2+3x-9.
11. $x^3+9x^2+11x-21$.
12. $x^3(x^2-7)^2-36x$.
13. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.
14. $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$.
15. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

16. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел, увеличенное на единицу, равно квадрату целого числа.

17. Доказать, что число $13^{2n}-1$, где n — натуральное, делится на 168.

18. Доказать, что число $7^{21}-487$ делится на 288.

19. Доказать, что из равенства

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=(a+b-2c)^2+\\+(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2$$

следует, что $a=b=c$, если a, b и c — вещественны.

20. Доказать, что если $m+n+p=0$, то $m^3+n^3+p^3=3mnp$.

21. Разделить многочлен

$$y^2x^2+2yx+1+2yzx^2+z^2x^2+2zx$$

на многочлен $1+xz+yx$.

22. Разделить многочлен

$$3ax+a^3x^3-3-3a+2x^2+4a^2x-x^3-a^2x^2+2x-a^3x^2$$

на многочлен

$$3-x^2+x+ax^2-ax.$$

23. Доказать, что многочлен $x^3+y^3+z^3-3xyz$ делится на многочлен $x+y+z$.

24. Доказать, что произведение

$$(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m+1}-1)$$

делится на $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)$. Число m — целое положительное.

25. Найти условие, при котором выражение

$$a^{m-1}+a^{m-2}+...+a+1$$

делится на выражение

$$a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1,$$

где m и n — натуральные числа.

26. Доказать, что многочлен $x^{3k}+x^{32}+x^{28}$ делится на x^2+x+1, где k — натуральное число.

27. Проверить справедливость равенства

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2n-1})=1+x+x^2+...+x^{2n-1}.$$

28. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок в выражении

$$(1+4x-4x^2)^{175}(1+2x)^5(1-3x+x^2+2x^3)^{149}.$$

29. Доказать равенство

$$a^2\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

30. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы дробь $\dfrac{ax+b}{mx+n}$ не зависела от x.

31. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы дробь $\dfrac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$ не зависела от x.

Упростить выражения (32—42):

32. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}+\dfrac{16}{1+x^{16}}$.

33. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

34. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

35. $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

36. $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

37. $\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\dfrac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$.

38. $\dfrac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2}\times$
$\times\dfrac{1}{1-\left[\dfrac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right]^2}$.

39. $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

40. $\dfrac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}$.

41. $\dfrac{\dfrac{a^2(c-b)}{bc}+\dfrac{b^2(a-c)}{ac}+\dfrac{c^2(b-a)}{ab}}{\dfrac{a(c-b)}{bc}+\dfrac{b(a-c)}{ac}+\dfrac{c(b-a)}{ab}}$.

42. $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+$
$+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$.

43. Доказать, что

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9,$$

если $a+b+c=0$.

44. Доказать, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

45. Доказать, что если

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=p^2;$$
$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=q^2;$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=pq,$$

то

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q},$$

если все величины, входящие в данные равенства, вещественны.

46. Доказать, что если

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

то

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\,(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

47. Доказать, что дробь $\dfrac{14n+3}{21n+4}$ при любом целом n — несократима.

48. Доказать, что $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{a}{c}$, если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$.

49. Доказать, что

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{c_1a_1^n+c_2a_2^n+\ldots+c_ka_k^n}{c_1b_1^n+c_2b_2^n+\ldots+c_kb_k^n},$$

если $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_k}{b_k}$, а c_1, c_2, ..., c_k — любые числа, не равные нулю одновременно.

50. Доказать иррациональность числа $\sqrt{2}$.

51. Почему $(\sqrt[3]{2})^3=2$?

52. Почему: а) $a^0=1$; б) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$; в) $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$, $m>0$; г) $a^1=a$?

53. Чему равно арифметическое значение $\sqrt{a^2}$?

54. Когда верны формулы: а) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{xy}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; в) $\sqrt{\dfrac{ac^4}{b^2}}=-\dfrac{c^2}{b}\sqrt{a}$; г) $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$?

55. Доказать, что если $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}$, то

$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)}$
$(a_k>0,\ b_k>0;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Упростить выражения (56—112):

56. $\left[\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}\cdot\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}$.

57. $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$.

58. $\dfrac{\dfrac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\dfrac{\sqrt[6]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}}{\dfrac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}}$.

59. $\dfrac{(x-y)^3(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-3}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3(\sqrt{xy}-x)}{x-y}$.

60. $\left[\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[4]{b^2}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{a+b}-\right.$
$\left.-\dfrac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}-\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}\right)(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[4]{ab})}{(\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{b^{-1}})(a+b)}\right]^{-1}$.

61. $\dfrac{(x^2+y\sqrt{xy}+x\sqrt{xy}+y^2)(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-2}-\sqrt{xy}}{x-y}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

62. $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3y}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^{-1}}}\right)(\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y})}{x+y-(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-1}}$.

63. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab^3}+\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\left(\dfrac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right)$.

64. $\left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{\dfrac{1-\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}-\sqrt{a}}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt[4]{a^{-1}}+\sqrt[4]{a^2}}{1+\sqrt[4]{a^{-1}}}-\sqrt{a}}\right)^5$.

65. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+3}{x(\sqrt{b}+\sqrt{3x^{-1}})^2}$.

66. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^3+2ax^2+a^2x}{x-a}}-\sqrt[3]{\dfrac{x^3-2ax^2+a^2x}{x+a}}\right)^{-1}\cdot\sqrt[3]{a}+$

$+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{a^{-2}}{x^{-1}}}$.

67. $b\left[\left(\dfrac{a\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right):(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})-\sqrt[4]{a}\right]^{-4}$.

68. $\sqrt[3]{a}-\left(\dfrac{1+a\sqrt[3]{a}+a+\sqrt[3]{a}}{1-\sqrt[3]{a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}\right)\times$

$\times\dfrac{\dfrac{1+a}{\sqrt[3]{a}+1}-\sqrt[3]{a^2}}{a^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{a}}$.

69. $\left(x+a^{\frac{3}{2}}:\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{5}}\left(1-\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}}\times\sqrt[10]{(x-a)^3}$.

70. $\left(\dfrac{\dfrac{a+\sqrt[3]{2a^2x}}{2x+\sqrt[3]{4ax^2}}-1}{\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2x}}{}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)$.

71. $\dfrac{(a+a\sqrt{x}+x+x\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^2}{x+x^{-1}-2}-x^{\frac{3}{2}}a\sqrt{\dfrac{a^2}{x}+4a+4x}.$

72. $\dfrac{\left[x\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}-(x+1)\sqrt[3]{(x^2-1)^{-2}}\right]^{\frac{3}{7}}}{\sqrt[7]{x^2-1}}.$

73. $\dfrac{x+2\sqrt{x}+1+\dfrac{x-\sqrt{ax}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\dfrac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{x})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}}:$

74. $\left[\sqrt[3]{\dfrac{a^5+2a^4b+4a^3b^2}{a^2-4ab+4b^2}}+\sqrt[3]{8b^3-\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-3}}\right]:$

$$:\left(\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab}-b\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab}+b\sqrt{2}}\right).$$

75. $\dfrac{\sqrt[3]{(b-3)\sqrt{ab}+(3-b^{-1})\sqrt{ab^{-1}}}}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}}\cdot\sqrt{b\sqrt[3]{b^2a}}.$

76. $\dfrac{(5-4x^2)\sqrt{5}-x\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2-1}\cdot(-8x)}{\sqrt{(5-4x^2)^2+(4x\sqrt{5})^2}}\times$

$$\times\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2a}}{\sqrt{x^{-1}}+\sqrt{a^{-1}}}.$$

77. $\left[\dfrac{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}+1}\right]:\dfrac{\sqrt{x}}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$

78. $\left\{\left[\dfrac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3+2a-b}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3+2b-a}\right]^2:\sqrt[12]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2}}\right\}\sqrt{\dfrac{b}{a}}.$

79. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}+a\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{a}}-1\right)\left(1+\sqrt[6]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2}}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2}}\right)$.

80. $\left[\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\right.$

$\left.+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right]\left[\sqrt{x^{-2}-1}-\dfrac{1}{x}\right]$, $x>0$.

81. $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{6}}-\dfrac{5}{\sqrt[6]{c}}}{a^{-\frac{1}{3}}-c^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{5(a^{-\frac{1}{6}}-c^{-\frac{1}{6}})}{a^{-\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{c^{-1}}}\right)^{-1}\cdot\dfrac{6\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}$.

82. $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}+2\right)\sqrt{0{,}2}$.

83. $\left[2\sqrt{\dfrac{2}{a}}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{b}}+\dfrac{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{2a}+\sqrt[4]{b}}\right)^{-2}\right]:$

$:\left(1+\dfrac{b}{2a}-2\sqrt{\left(\dfrac{2a}{b}\right)^{-1}}\right)$.

84. $\left[\dfrac{\sqrt{b}+\dfrac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2}}\right]:$

$:\left(1+\dfrac{2\sqrt{ab}+2b}{a-b}\right)$.

85. $\left[\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\right.$

$\left.+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}\right]:\left[\dfrac{a-1}{2(\sqrt{a}+1)}+1\right]$.

86. $9\left(\sqrt[3]{2\sqrt{54}}-\sqrt[3]{3\sqrt{\frac{3}{8}}}\right)^{-4}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\times$

$$\times\sqrt[3]{40\sqrt{2}+56}:\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}.$$

87. $\left[\sqrt{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}}\sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}}\right]^{-1}:\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{1-a^2}}{3a\sqrt{a}}}.$

88. $\left\{\left[\frac{\sqrt[4]{1-x}}{2\sqrt[4]{(1+x)^3}}+\frac{\sqrt[4]{1+x}(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{2}\right](1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{4}}.$

89. $x^3\left[\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2+(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{x+\sqrt{xy}}\right]^5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{x^{-1}}}.$

90. $x\sqrt{\frac{(x^2-y^2)(x-y)^2}{x+y}}+y\sqrt{\frac{(4x^2-9y^2)^2(x-y)}{(2x-3y)^2}}+$

$$+\frac{2xy}{x-y}\sqrt{\frac{(x^2-y^2)^3}{(x+y)^3}}-(x^2-y^2)\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x-y}}.$$

91. $\frac{(\sqrt{a^2+1}+a)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}-1\right)-(\sqrt{a^2+1}-a)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+1\right)}{\sqrt{a^2+1}+a}\times$

$$\times\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}.$$

92. $\sqrt{\left(\frac{p^2+q^2}{p^3-pq^2}+\frac{2q}{p^2-q^2}\right)(p^2+pq)}-$

$$-\sqrt{\left(\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pq}{p^2-q^2}\right)(p+q)};\quad p>q>0.$$

93. $\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+(\sqrt{x}+1)^2(1-\sqrt{x})^{-2}}\left[\frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1-\sqrt[4]{x})}-\right.$

$$-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1+\sqrt[4]{x})}\Bigg]^2-\frac{1}{2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}}.$$

94. $\dfrac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}.$

95. $\dfrac{1-(m+x)^{-2}}{\left(1-\dfrac{1}{m+x}\right)^2}:\left[1-\dfrac{1-(m^2+x^2)}{2mx}\right]^{-1}$, если $x=\dfrac{1}{m-1}$.

96. $\left[\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$,

если $x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$ и $k>1$.

97. $(1+x^{-1})^{-2}+(1-x^{-1})^{-2}$,

если $x=(1-n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1+n^{-1})^{-\frac{1}{2}}$.

98. $\left[\dfrac{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(x+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}}{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(x+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}$,

если $x=\sqrt{ab}$ и $a>b>0$.

99. $\left[(x+a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{-\frac{1}{3}}+(x+a)^{-\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{1}{3}}-2\right]^{-\frac{1}{2}}$,

если $x=a\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3}$ и $m>n>0$.

100. $\left(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}}\right)^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$, если

$$x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}.$$

101. $\left(a+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, если $x=4(a-1)$ и

1) $1<a<2$; 2) $a>2$.

102. $\left[\dfrac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}$, если

$$x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } n>m>0.$$

103. $\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$, если $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$

и $m>0$, $0<n<1$.

104. $\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

если $x=\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

105. $\dfrac{2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, если $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$

и $a>0$, $b>0$.

106. x^3+12x, если $x=\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}-\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$.

107. x^3+ax+b, если $x=\sqrt[3]{-\dfrac{b}{2}+\sqrt{\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}}}+$

$$+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}.$$

108. $(x^{-1}+a^{-1})(x+a)^{\frac{1}{n}}-b^{-1}x^{\frac{1}{n}}$, если

$$x=ab^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}-b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-1}.$$

109. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}-mx}{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}+mx}:\sqrt{\dfrac{1-nx}{1+nx}}$,

если $x=\dfrac{1}{m}\sqrt{\dfrac{2m}{n}-1}$ и $0<m<n<2m$.

110. $\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^nx^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{x^na^{n^2}}}-1$,

если $x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$.

111. $\sqrt[n]{a^kx^{n-k}}+\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}-2\sqrt{bx}+b^2$, если

$$x=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{2k}{n-2k}}}.$$

112. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}-4\sqrt[n]{x^2-1}+1$, если

$$x=\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}.$$

Доказать справедливость равенств (113—115):

113. $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=$

$=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$, n — натуральное.

114. $b\sqrt{2}\cdot\dfrac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}$,

если $a>|b|$.

115. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$, если $x\leqslant 2$.

II.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

116. Доказать, что уравнение $ax+b=0$ при $a\neq 0$ имеет решение и притом единственное.

117. Доказать, что для совместности уравнений $a_1x+b_1=0$ и $a_2x+b_2=0$, где $a_1\neq 0$ и $a_2\neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $a_1b_2-a_2b_1=0$.

Выяснить, совместны ли уравнения (118—120):

118. $x+1=0$ и $x^2+5x+4=0$.

119. $x^2+x-20=0$ и $x^2-6x+8=0$.

120. $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$.

Выяснить, являются ли равносильными уравнения (121—124):

121. $2x=x-1$ и $2x+x^2+1=x+x^2$.

122. $x^2=3x-2$ и $x^2+\dfrac{1}{x-1}=3x-2+\dfrac{1}{x-1}$.

123. $x+1=0$ и $(x+1)\sqrt{x-1}=0$.

124. $\sqrt{(x-6)(x-1)}=\sqrt{14}$ и $\sqrt{x-6}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{14}$.

Решить уравнения (125—134):

125. $a^2x=a(x+2)-2$.

126. $\dfrac{x-mn}{m+n}+\dfrac{x-mp}{m+p}+\dfrac{x-np}{n+p}=m+n+p$.

127. $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}+\dfrac{4x}{a+b+c}=1$;

a, b и c — числа одного знака.

128. $|x-1|=2$.

129. $|x-1|+|x-2|=1$.

130. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$.

131. $\dfrac{|x|-1}{4}-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{|x|-5}{4}-\dfrac{14-2\cdot|x|}{5}\right)=\dfrac{|x|-9}{2}-\dfrac{7}{8}$.

132. $\dfrac{7x+4}{5}-x=\dfrac{|3x-5|}{2}$.

133. $x-\dfrac{|3x-2|}{5}=3-\dfrac{2x-5}{3}$.

134. $\dfrac{(2m-ax)^3+(ax-3n)^3}{(2m-ax)^2+(ax-3n)^2}=2m-3n.$

135. Является ли совокупность уравнений

$$7x-2y+5=0;$$
$$7x-2y+5=0$$

системой?

136. В результате решения системы уравнений

$$\frac{3xy}{x+y}=5; \quad \frac{2xz}{x+z}=3; \quad \frac{yz}{y+z}=4$$

нашли, что системе удовлетворяют следующие числа:

$$x=\frac{120}{61}; \quad y=\frac{120}{11}; \quad z=\frac{120}{19}.$$

Сколько это даст решений?

137. Если решение одной системы является решением другой системы, то будут ли эти системы эквивалентными?

138. Дана система уравнений

$$\begin{cases} A=0; \\ B=0. \end{cases}$$

Умножаем первое уравнение на $m_1\neq 0$, второе на $m_2\neq 0$ и результаты складываем; затем повторяем эту операцию, взяв множителями числа $n_1\neq 0$ и $n_2\neq 0$, причем $n_1\neq m_1$ и $n_2\neq m_2$. В результате получим новую систему

$$\begin{cases} C=0; \\ D=0. \end{cases}$$

Будет ли полученная система эквивалентна данной?

139. Доказать, что системы

$$\begin{cases} A=0; \\ B=0 \end{cases} \qquad (*)$$

и

$$\begin{cases} m_1A+m_2B=0; \\ n_1A+n_2B=0 \end{cases} \qquad (**)$$

эквивалентны, если $m_1n_2-m_2n_1\neq 0$.

140. Верно ли предложение, обратное сформулированному в задаче 139, т. е. если рассматриваемые в той задаче системы эквивалентны, то $m_1n_2-m_2n_1\neq 0$?

141. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0; \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases}$$

Предполагая, что $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, будем решать ее каким-либо способом, например способом сложения и вычитания. Получаем:

$$x=\frac{c_2b_1-c_1b_2}{a_1b_2-a_2b_1};\qquad y=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Нужно ли проверять, удовлетворяют ли найденные значения x и y данной системе?

142. Доказать, что система

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0; \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

имеет одно и только одно решение, если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

143. Равносильны ли уравнения

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \text{ и } P(x)=0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены относительно x?

144. Равносильны ли уравнения

$$x^m=y^m \text{ и } x=y?$$

m — натуральное число.

145. Определить число a так, чтобы система

$$2x+y=5;\ 3x-2y=4;\ ax+5y=11$$

была совместна.

3 —

146. При каких a и b система

$$3x-4y=12;\quad 9x+ay=b$$

будет несовместной и при каких неопределенной?

147. Определить k так, чтобы система

$$x+(1+k)y=0;\quad (1-k)x+ky=1+k;$$
$$(1+k)x+(12-k)y=-(1+k)$$

была совместна.

148. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x+2y=10; \\ mx+(m-1)y=3m+1; \\ 2mx+4y=7m-1 \end{cases}$$

либо несовместна, либо неопределенна.

149. Противоречит ли равенство

$$a(b+c)=ab+c$$

равенству

$$a(b+c)=ab+ac\ ?$$

Решить системы уравнений (150—154):

150. $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5; \\ |x+1|=4y-4. \end{cases}$

151. $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1; \\ y=5+|x-1| \end{cases}$

152. $\begin{cases} 3|x|+5y+9=0; \\ 2x-|y|-7=0. \end{cases}$

153. $\begin{cases} |x-y|=2; \\ |x|+|y|\neq 4. \end{cases}$

154. $\begin{cases} |x+y|=1; \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$

155. При каких целых значениях n решение системы

$$\begin{cases} nx-y=5; \\ 2x+3ny=7 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям $x>0$, $y<0$?

156. При каких значениях a и b многочлен

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b$$

делится на x^2-3x+2?

157. При каких значениях a и b многочлен

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b$$

делится на x^2-3x+4?

158. Многочлен

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

при делении на $x-a$ дает остаток A, а при делении на $x-b$ дает остаток B. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-a)(x-b)$, если $a\neq b$.

159. Многочлен

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

при делении на $x-a$ дает остаток A, при делении на $x-b$ — остаток B, при делении на $x-c$ — остаток C. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-a)(x-b)(x-c)$, если a, b и c различны.

160. При каком соотношении между p и q многочлен x^3+px+q делится (без остатка) на $(x-\alpha)^2$ и чему равно в этом случае α?

161. Многочлен

$$x^4+2x^3+ax^2+2x+b$$

является квадратом другого многочлена. Найти этот последний многочлен, а также числа a и b.

162. Определить A, B и C так, чтобы имело место равенство

$$\frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

163. Убедиться, что система

$$2x+3y-z+4=0; \quad 7x-4y-5z+4=0;$$
$$3x-y+2z-10=0; \quad 8x-8y-2z+5=0$$

несовместна.

164. Дана система

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right); \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right); \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right); \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Выяснить, при каких λ и μ она совместна, и определить x, y, z.

165. Найти все решения системы

$$\begin{cases} x-2y+4z=0; \\ 2x+y+3z=0. \end{cases}$$

Решить системы уравнений (166—171):

166. $$\begin{cases} \dfrac{x-a}{(b+c)^2-a^2}=\dfrac{y-b}{(c+a)^2-b^2}=\dfrac{z-c}{(a+b)^2-c^2}; \\ x+y+z=k(a+b+c). \end{cases}$$

167. $$\begin{cases} x-y+z=0; \\ (a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0; \\ abx-acy+bcz=1. \end{cases}$$

Числа a, b и c различны.

168. $$\begin{cases} (b+c)(y+z)-ax=b-c; \\ (c+a)(z+x)-by=c-a; \\ (a+b)(x+y)-cz=a-b, \end{cases}$$

если $a+b+c\neq 0$.

169. $ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=a+b+c.$

Числа a, b и c — вещественные.

170. $$\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx}=c; \\ \dfrac{zx}{az+cx}=b; \\ \dfrac{yz}{bz+cy}=a. \end{cases}$$

171. $$\begin{cases} \dfrac{x_1-a_1}{m_1}=\dfrac{x_2-a_2}{m_2}=\ldots=\dfrac{x_p-a_p}{m_p}; \\ x_1+x_2+\ldots+x_p=a. \end{cases}$$

172. Определить вещественное число a так, чтобы один из корней уравнения

$$4x^2-15x+4a^3=0$$

был квадратом другого.

173. Составить квадратное уравнение с вещественными коэффициентами, один из корней которого равен $\dfrac{1+i}{1-i}$.

174. При каких значениях a уравнение

$$(5a-1)x^2-(5a+2)x+3a-2=0$$

имеет равные корни?

175. При каком вещественном значении m выражение

$$x^2+m(m-1)x+36$$

есть полный квадрат?

176. При некоторых значениях p уравнение

$$x^2+3x+3+p(x^2+x)=0$$

имеет равные корни. Составить квадратное уравнение, имеющее корнями эти значения p.

177. В уравнении

$$x^2-2x+q=0$$

квадрат разности корней равен 16. Определить свободный член уравнения.

178. При каких значениях m уравнение

$$9x^2-18mx-8m+16=0$$

имеет корни, отношение которых равно двум?

179. При каких вещественных значениях m уравнение

$$2mx^2-2x-3m-2=0$$

имеет различные корни?

180. Какими должны быть p и q, чтобы уравнение

$$x^2+px+q=0$$

имело корнями p и q?

181. При каком m уравнения

$$2x^2-(3m+2)x+12=0;$$
$$4x^2-(9m-2)x+36=0$$

имеют общий корень?

182. Показать, что уравнение

$$(x-1)(x-3)+m(x-2)(x-4)=0$$

имеет вещественные корни при любом вещественном m.

183. Показать, что корни уравнения

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

всегда вещественны, если a, b и c вещественны.

184. При каких целых k корни уравнения

$$kx^2-(1-2k)x+k=2$$

рациональны?

185. Доказать, что при нечетных p и q уравнение

$$x^2+px+q=0$$

не имеет рациональных корней.

186. Доказать, что уравнение

$$x^4+ax+1=0$$

не имеет рациональных корней, если a — целое число, но $|a|\neq 2$.

187. Доказать, что если уравнение

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m=0$$

с целыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_m$ имеет рациональный корень, то этот корень есть целое число.

188. Доказать, что если несократимая рациональная дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m=0$$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, то q есть делитель a_0, а p есть делитель a_m.

189. Доказать, что если алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами имеет корень вида $a+b\sqrt{c}$, где a, b и c — рациональные числа, причем $b\neq 0$, $c>0$ и c не является квадратом рационального числа, то оно имеет и корень вида $a-b\sqrt{c}$.

Решить уравнения (190—193):

190. $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

191. $x^2(1+x)^2+x^2=8(1+x)^2$.

192. $x(x+1)(x-1)(x+2)=24$.

193. $(x-2)^4+(x-3)^4=1$.

194. Решить уравнение

$$x^3+21x^2+140x-300=0,$$

если известно, что один из его корней вдвое больше одного из двух других.

195. Составить алгебраическое уравнение наименьшей степени с рациональными коэффициентами, имеющее корнями

$$1+\sqrt{3} \quad \text{и} \quad 2+\sqrt{3}.$$

Решить системы уравнений (196—210):

196. $\begin{cases} x^2-3x+2=0; \\ x^2+5x-14=0. \end{cases}$

197. $\begin{cases} x^2+xy=6; \\ y^2+xy=3. \end{cases}$

198. $\begin{cases} x^4+3x^2y^2+y^4=109; \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

199. $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25; \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$

200. $\begin{cases} x(y+z)=5; \\ y(z+x)=8; \\ z(x+y)=9. \end{cases}$

201. $\begin{cases} x+y+z=13; \\ x^2+y^2+z^2=61; \\ 2yz=x(z+y). \end{cases}$

202. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=35; \\ 3x+2y^2-7xz=-14; \\ x(z-1)=4. \end{cases}$

203. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14; \\ xy+xz-yz=7; \\ x+y+z=6. \end{cases}$

204. $\begin{cases} x^2+y^2=axyz; \\ y^2+z^2=byzx; \\ z^2+x^2=czxy. \end{cases}$

$$a>b>c>0, \quad b+c>a.$$

205. $\begin{cases} x^2+y^2=z^2; \\ xy+yz+zx=47; \\ (z-x)(z-y)=2. \end{cases}$

206. $\begin{cases} x(x+y+z)=a^2; \\ y(x+y+z)=b^2; \\ z(x+y+z)=c^2. \end{cases}$

$$a>0, \quad b>0, \quad c>0.$$

207. $\begin{cases} y+z+yz=a; \\ z+x+zx=b; \\ x+y+xy=c. \end{cases}$

$a>-1, \quad b>-1, \quad c>-1.$

208. $\begin{cases} x^2=a+(y-z)^2; \\ y^2=b+(z-x)^2; \\ z^2=c+(x-y)^2. \end{cases}$

$a>0, \quad b>0, \quad c>0.$

209. $\dfrac{yz}{bz+cy}=\dfrac{zx}{cx+az}=\dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$;

a, $б$, c вещественны.

210. $\begin{cases} x+y+z=0; \\ x^2+y^2-z^2=20; \\ x^4+y^4-z^4=560. \end{cases}$

211. Найти вещественные решения системы

$$\begin{cases} 2x-y=1; \\ 4x+y-2xy-z^2=3. \end{cases}$$

Выяснить, являются ли уравнения равносильными (212—214):

212. $\sqrt{P(x)}=\sqrt{Q(x)}$ и $P(x)=Q(x)$.

213. $\sqrt{P(x)Q(x)}=R(x)$ и $\sqrt{P(x)}\sqrt{Q(x)}=R(x)$.

214. $\sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}=R(x)$ и $\dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}=R(x)$.

Решить уравнения (215—239):

215. $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=2$.

216. $\dfrac{(x-1)(x-2)-(x-3)(x-4)}{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-7x+12}}=\sqrt{2}$.

217. $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\dfrac{3}{2}(x+1)$.

218. $\sqrt[5]{(7x-3)^3}+8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}}=7$.

219. $\left(1+\dfrac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(\dfrac{x}{x+9}\right)^{\frac{1}{2}}=4$.

220. $(a+x)^{\frac{2}{3}}+4(a-x)^{\frac{2}{3}}-5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}=0$.

221. $\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}}=2.$

222. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1.$

223. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}.$

224. $\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2+x}.$

225. $4x+1+2x\sqrt{2(2x^2+1)}+(2x+1)\sqrt{4x^2+4x+3}=0.$

226. $2\sqrt{2x+\sqrt{x}}=3\sqrt{\frac{x}{2x+\sqrt{x}}}+2\sqrt{2x-\sqrt{x}}.$

227. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}.$

228. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}.$

229. $\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}+\sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=2.$

230. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1.$

231. $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{x}{2}.$

232. $\frac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=a^3\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}.$

233. $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1.$

234. $\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}.$ *

---

* В примерах 234—239 n — целое >1.

235. $\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{x^n a^{n^2}}}=b,$

где $a>0$.

236. $\sqrt[n]{a^k x^{n-k}}+\sqrt[n]{x^k a^{n-k}}+2\sqrt{bx}$, где $n>k>0$, $b>a>0$.

237. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}$.

238. $\frac{\sqrt[n]{a-x}}{x^2}-\frac{\sqrt[n]{a-x}}{a^2}=\sqrt[n]{\frac{x^2}{a+x}}$.

239. $\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^2}}}-\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{a^2}}}=\sqrt[2n]{x}$.

Решить системы уравнений (240—243):

240. $\begin{cases} x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y}; \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

241. $\begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}=\frac{7}{2}; \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3. \end{cases}$

242. $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}+y-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}{y}=0{,}375; \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7. \end{cases}$

243. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}; \\ x+y=20. \end{cases}$

III.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

244. Турист, идущий из деревни на станцию, пройдя за первый час 3 *км*, рассчитал, что он опоздает к поезду на 40 *мин*, если будет двигаться с тою же скоростью. Поэтому остальной

путь он проходит со скоростью 4 *км/час* и прибывает на станцию за 45 *мин* до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

245. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести влево (т. е. поместить вначале), то новое число будет на единицу больше утроенного первоначального числа. Найти это число.

246. Самолет летел сначала со скоростью 220 *км/час*. Когда ему осталось пролететь на 385 *км* меньше, чем пролетел, он изменил скорость и стал двигаться со скоростью 330 *км/час*. Средняя скорость самолета на всем пути оказалась равной 250 *км/час*. Какое расстояние пролетел самолет?

247. Мне вдвое больше лет, чем Вам было тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам теперь; когда Вам будет столько лет, сколько мне теперь, тогда сумма наших возрастов будет равна 63 годам. Сколько лет каждому?

248. Две автомашины выехали одновременно из одного и того же пункта в одном и том же направлении. Первая имеет скорость 50 *км/час*, а вторая 40 *км/час*. Спустя полчаса из того же пункта выехала третья машина и, догнав вторую, находилась в движении еще 1,5 *час* до того, как нагнала первую. Какова скорость третьей машины, если движение всех машин равномерное?

249. Пассажирский поезд идет из A в B и после 5 *мин* остановки в B идет далее в C. Спустя 14 *мин* после того, как он покинул B, ему встречается скорый поезд, скорость которого вдвое больше скорости пассажирского поезда. Скорый поезд выехал из C в тот момент, когда пассажирский поезд был на расстоянии 25 *км* от A. Кроме того, известно, что скорому поезду нужно 2 *час*, чтобы пройти расстояние CB, и что если он из A сразу возвратится, то прибудет в C на 0,75 *час* позже прибытия пассажирского поезда. Сколько километров в час делает каждый поезд и как удалены друг от друга пункты A, B и C?

250. Некоторое количество денег было разложено на n кучек. После этого из первой кучки переложили во вторую $\frac{1}{n}$ часть бывших в первой кучке денег. Затем из второй кучки $\frac{1}{n}$ часть оказавшихся в ней после перекладывания денег переложили в третью кучку. Далее, $\frac{1}{n}$ часть денег, получившихся после этого в третьей кучке, переложили в четвертую и т. д. Наконец из n-й кучки $\frac{1}{n}$ часть оказавшихся в ней после предшествующего перекладывания денег переложили в первую кучку. После этого

в каждой кучке стало A рублей. Сколько денег было в каждой кучке до перекладывания?

251. Двое рабочих, работая вместе, могут окончить некоторую работу в 12 дней. После 8 дней совместной работы один из них заболел, и другой окончил работу один, проработав еще 5 дней. Во сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу?

252. Две бригады рабочих, работая одновременно, могут выполнить некоторую работу в 8 дней. Если бы работало $\frac{2}{3}$ рабочих первой бригады и 0,8 второй, то работа была бы выполнена в $11\frac{1}{4}$ дней. Во сколько дней могла бы выполнить эту работу каждая бригада в отдельности?

253. Когда старшему брату было столько лет, сколько сейчас среднему, тогда младшему было 10 лет. Когда среднему будет столько, сколько сейчас старшему, тогда младшему будет 26 лет. Сколько лет каждому брату, если сумма лет старшего и среднего братьев в день рождения младшего была в два раза больше числа лет младшего в настоящее время?

254. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1 : 2, а другой содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

255. Поезд вышел со станции A по направлению к B в 9 *час.* В 15 *час* он остановился из-за снежного заноса. Через 2 *час* путь был расчищен, и машинист, чтобы наверстать потерянное время, повел поезд на остальном пути со скоростью, превышающей скорость поезда до остановки на 20%. Но поезд все же пришел с опозданием на 1 *час.* На следующий день поезд, шедший по тому же расписанию, тоже попал в занос, но на 150 *км* дальше от A, чем первый поезд. Простояв 2 *час*, он тоже пошел со скоростью на 20% выше прежней, но нагнал лишь полчаса и пришел в B с опозданием на 1,5 *час.* Найти расстояние между A и B.

256. На участке реки от A до B течение так медленно, что его можно принять равным нулю. На участке же от B до C оно достаточно быстро. Лодочник проплывает расстояние от A до C за 3 *час*, а обратно от C до A (вверх) за 3,5 *час.* Если бы на всем протяжении от A до C течение было такое же, как от B до C, то на весь путь от A до C потребовалось бы $2\frac{3}{4}$ *час.* Сколько времени понадобилось бы в этих условиях, чтобы подняться вверх от C до A?

257. В сберкассу на книжку было положено 1640 руб. и в конце года было взято обратно 882 руб. Еще через год на книжке снова оказалось 882 руб. Сколько процентов начисляет сберкасса в год?

258. Двое рабочих взялись сжать ржаное поле в течение одного дня, причем каждый обязался сжать половину поля. Первый начал работу на 2 *час* 16 *мин* раньше второго. В полдень, когда ими уже было сжато 0,4 поля, они приостановили работу для обеда и отдыха на 1,5 *час*. Первый окончил свою часть в 7 *час* 54 *мин*, а второй в 8 *час* 10 *мин* пополудни. В котором часу начал работать каждый?

259. Два каменщика сложили вместе стену в 20 дней. Во сколько дней выполнил бы работу каждый из них отдельно, если известно, что первый каменщик должен работать на 9 дней больше второго?

260. Два пешехода A и B вышли одновременно друг другу навстречу из городов M и N. Когда они встретились, то оказалось, что A прошел на 6 *км* больше, чем B. Если каждый из них будет продолжать путь с той же скоростью, то A придет в N через 4,5 *час*, а B в M — через 8 *час* после встречи. Определить расстояние между M и N.

261. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из A в B и из B в A. После встречи одному приходится еще быть в пути 2 *час*, а другому $\frac{9}{8}$ *час*. Определить их скорости, если расстояние между A и B равно 210 *км*.

262. Для печения пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для печения ржаного хлеба взято на 10 *кг* больше муки, а именно столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего выпечено 112,5 *кг* хлеба?

263. Проходя первый участок пути в 24 *км*, паровоз делал в час на 4 *км* меньше, чем когда проходил второй участок в 39 *км*. На прохождение второго участка он употребил на 20 *мин* больше, чем на прохождение первого. Какова скорость паровоза на первом участке?

264. По окружности длиною в 360 *м* движутся два тела. Одно из них проходит в секунду на 4 *м* больше другого и поэтому проходит всю окружность на 1 *сек* скорее. Сколько метров в секунду проходит каждое тело?

265. Окружность заднего колеса в 2 раза больше окружности переднего. Если длину окружности заднего колеса уменьшить на 1 *м*, а переднего увеличить на 1 *м*, то на протяжении 60 *м* заднее колесо сделает на 30 оборотов больше переднего. Определить длину окружности каждого колеса.

266. Трамвайная линия имеет длину 15 *км*. Если увеличить скорость трамвая на 3 *км/час*, то трамвай будет затрачивать на каждый рейс на полчаса меньше, чем теперь (рейсом называется пробег трамвая туда и обратно). Сколько времени затрачивает теперь трамвай и какова его скорость?

267. В ремонте дома участвовали плотники и маляры. Те и другие получили за работу одну и ту же сумму, но маляров было двумя меньше, чем плотников, и поэтому каждый маляр получил одним рублем больше плотника. Сколько было плотников и сколько маляров, если известно, что число рублей, уплаченных им всем, было на 26 больше утроенного числа всех рабочих?

268. От Москвы до Ленинграда 650 *км*. Пассажирский поезд проходит это расстояние на 12 *час* скорее товарного, так как его часовая скорость на 24 *км* больше. Сколько километров в час проходит каждый поезд?

269. От дома до школы 400 *м*. Ученик старшего класса делает на этом пути на 300 шагов меньше, чем ученик младшего класса, так как у него шаги на 30 *см* больше. Определить длину шага каждого.

270. Магазин купил кусок сукна за 200 руб. 5 *м* из этого куска остались непроданными, а остальное сукно было продано за 190 руб., при этом на каждом метре было получено 1,5 руб. прибыли. Сколько метров сукна было в куске?

271. Куплено два сорта некоторого товара, причем второго сорта на 15 *кг* больше первого. За второй сорт заплачено 32 руб., а за первый 22,5 руб. Сколько куплено килограммов того и другого сорта, если килограмм второго сорта стоил на 10 коп. дешевле килограмма первого?

272. При двух последовательных одинаковых процентных повышениях заработной платы сумма в 100 руб. обратилась в 125 р. 44 к. Определить, на сколько процентов повышалась заработная плата?

273. В сосуде было 20 *л* чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же литров, сколько в первый раз, и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?

274. У мальчика имеются двухкопеечные монеты. Играя, он укладывает их на площадке плотно одну к другой то в виде квадрата, то в виде правильного треугольника, используя каждый раз все монеты. В последнем случае в стороне содержится на 2 монеты больше, чем в первом. Какая сумма денег имеется у мальчика?

275. В шахматном турнире двое из участников выбыли, сыграв только по три партии каждый. Поэтому на турнире было сыграно всего 84 партии. Сколько было участников первоначально и играли ли выбывшие участники между собой?

276. Куплено материи двух сортов на сумму 15 р. 20 к. Если бы цена материи первого сорта была выше, а второго ниже на одно и то же число процентов, то первый сорт стоил бы 15 руб., а второй 2 р. 40 к. Сколько стоил первый сорт в действительности?

277. Из Тулы по направлению к Вязьме вышел товарный поезд. Спустя 5 *час* 5 *мин* по той же дороге вышел из Вязьмы в Тулу пассажирский поезд. Оба поезда встретились на промежуточной станции. От этой станции товарный поезд шел до Вязьмы 12 *час* 55 *мин* и от той же станции пассажирский поезд шел до Тулы 4 *час* 6 *мин*. За какое время прошел каждый поезд путь между Вязьмой и Тулой?

278. Студенты взяли на лодочной станции лодку напрокат. Сначала они спустились на 20 *км* вниз по течению реки, затем повернули обратно и вернулись на лодочную станцию, затратив на всю прогулку 7 *час*. На обратном пути, на расстоянии 12 *км* от лодочной станции, они встретили плот, проплывавший мимо лодочной станции как раз в тот момент, когда они отправлялись на прогулку. Определить, с какой скоростью двигалась лодка вниз по течению и какова скорость течения?

279. Из двух населенных пунктов выходят навстречу друг другу два курьера и встречаются в некотором пункте M_1. Если бы первый курьер вышел на час раньше, а второй на полчаса позже, то они встретились бы на 18 *мин* раньше, чем в действительности. Если бы второй вышел на час раньше, а первый на полчаса позже, то они встретились бы в пункте, отстоящем от M_1 на 5600 *м*. Найти скорости обоих курьеров.

280. Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы окончить работу за 24 *час*, если бы делали ее все одновременно. Вместо этого они приступили к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый работал до окончания всей работы. Сколько времени они рыли канаву, если первый, приступивший к работе, проработал в 5 раз больше, чем последний?

281. Сплав из двух металлов весом в P *кг*, будучи погруженным в воду, теряет в своем весе A *кг*. Такой же вес первого из двух составляющих металлов, погруженного в воду, теряет B *кг*, а второй C *кг*. Найти вес составляющих сплав металлов и исследовать возможность решения задачи в зависимости от величин P, A, B и C.

282. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих m *кг* и n *кг*, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

283. Объем A составляет m-ю часть суммы объемов B и C, а объем B — n-ю часть суммы объемов A и C. Какую часть суммы объемов A и B составляет объем C?

284. Две точки движутся с постоянными скоростями по окружности длиною L. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются каждые t_1 *сек*. При движении в одном направлении одна точка настигает другую через каждые t_2 *сек*. Определить скорости обеих точек.

285. Из A в B отправилась лодка. Когда лодка прошла уже l *км*, из A в B вышел пароход, который пришел в B на t *час* раньше лодки. Каково расстояние между A и B, если скорость лодки составляет v *км/час*, а скорость парохода w *км/час*?

286. Мастер дает сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В конце первых двух часов он закончил p% партий выигрышем, а l партий проиграл. За следующие два часа он выиграл у q% оставшихся противников, m партий проиграл и остальные n партий закончил вничью. На скольких досках шла игра?

287. В сосуде содержится a *л* p%-ного раствора азотной кислоты. Сколько литров q%-ного раствора той же кислоты нужно влить в сосуд, чтобы после добавления некоторого количества воды, доводящего общий объем смеси до b *л*, получилась бы кислота крепостью r%?

288. В одном сосуде находится a *л* p%-ного раствора кислоты, а в другом b *л* q%-ного раствора той же кислоты. Из каждого сосуда отлили по одинаковому количеству литров и взятое из первого вылили во второй, а взятое из второго вылили в первый. Сколько литров было взято из каждого сосуда, если в сосудах оказался раствор одной и той же крепости?

289. Два велосипедиста, выехав одновременно с разными, но постоянными скоростями из пункта A в пункт B, достигнув его, сразу поворачивают обратно. Первый велосипедист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии a *км* от B, затем, достигнув A и снова повернув к B, он встречает второго велосипедиста, пройдя k-ю часть расстояния от A до B. Найти расстояние от A до B.

290. В некоторой точке круглого биллиарда радиуса R на расстоянии a от его центра находится упругий шарик. В какую точку борта нужно направить шарик, чтобы он, дважды отразившись от борта, вернулся в исходную точку? Размерами шарика пренебрегаем.

291. Сферический баллон с толщиной стенки ε, изготовленный из материала плотности d, наполнен жидкостью плотности δ. Каков должен быть внутренний радиус R баллона, для того чтобы при погружении его в жидкость плотности Δ имело место равновесие? Какому условию должны удовлетворять плотности d, δ и Δ, чтобы задача была возможна?

292. Средний годовой процент прироста населения из года в год остается постоянным. Если бы годовой процент прироста увеличился на k, то через n лет численность населения была бы

в два раза больше, чем при нормальных условиях. Определить годовой процент прироста населения.

293. Сосуд, наполненный последовательно двумя жидкостями, плотности которых d и D, весит соответственно q и Q *кг*, включая сюда и вес самого сосуда. Найти вес сосуда и его объем. Найти условия возможности задачи.

294. Два поезда выезжают одновременно из A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии p *км* от B. Через t *час* после встречи второй поезд, миновав пункт A, находился в q *км* от него, а первый в это время, миновав пункт B, находился от второго поезда на расстоянии в два раза большем, чем расстояние между пунктами A и B. Найти скорости поездов и расстояние между A и B.

295. Число x в m раз больше разности чисел y и z, а число y в n раз больше разности x и z. Найти зависимость между m и n, если известно, что z в два раза больше разности чисел x и y. Числа x, y и z не равны нулю.

296. Часы показывают в некоторый момент на m *мин* меньше, чем следует, хотя и спешат. Если бы они показывали на n *мин* меньше, чем следует, но уходили бы в сутки на t *мин* больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки эти часы спешат?

297. Дети делят орехи. Первый взял a орехов и n-ю часть остатка; второй — $2a$ орехов и n-ю часть нового остатка; третий — $3a$ орехов и n-ю часть нового остатка и т. д. Оказалось, что таким способом разделены все орехи поровну. Сколько было детей?

298. Колхоз купил для заправки тракторов на a руб. лигроина и на такую же сумму керосина, всего n *кг*. Сколько килограммов куплено лигроина и сколько керосина, если килограмм первого на b руб. дороже килограмма второго?

299. Из пункта A в пункт B выехала машина с почтой. Через t *мин* за ней выехала другая. Двигаясь со скоростью v *км/час*, она нагнала первую и, передав забытый срочный пакет, повернула назад. В пункт A вторая машина прибыла одновременно с прибытием первой в пункт B. С какой скоростью двигалась первая машина, если расстояние между A и B равно b *км*?

300. Две бригады рабочих заработали по одинаковому числу руб. В первой бригаде было на a рабочих меньше, чем во второй, вследствие чего каждому рабочему второй бригады досталось на b руб. меньше, чем каждому рабочему первой бригады. Число рублей, заработанных каждой бригадой, на c больше числа рабочих в обеих бригадах вместе. Сколько было рабочих в каждой бригаде?

301. Двое рабочих выкопали ров, работая один после другого. При этом первый работал a дней и выполнил часть всей рабо-

ты, равную $\frac{p}{q}$. Если бы они работали вместе, то ров был бы вырыт в число дней, равное среднему арифметическому между числом дней, в течение которых работал первый, и числом дней, в течение которых работал второй. Сколько дней работал второй?

302. По одной и той же окружности движутся два тела в одну и ту же сторону. Длина окружности равна a *м*. Одно тело проходит окружность на p *мин* скорее другого тела. Определить, сколько метров в минуту проходит каждое тело, зная, что они при движении сходятся каждые q *мин*.

303. Наняты двое рабочих по разным ставкам. Первый получил a руб., а второй, работавший меньше первого на n дней, получил c руб. Если бы первый работал столько дней, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то они получили бы поровну. Сколько дней работал каждый?

304. Группа экскурсантов должна была заплатить за обед в ресторане a руб. Но у b участников не оказалось в наличии денег и поэтому каждый из остальных внес еще c руб. Сколько было экскурсантов?

305. Скорый поезд был задержан у семафора на p *мин* и наверстал опоздание на перегоне в d *км*, пройдя его со средней скоростью на v *км/час* больше той, какая полагалась по расписанию. Какова средняя скорость на этом перегоне по расписанию?

306. Два вкладчика положили в сберкассу одинаковые суммы. Первый взял вклад по истечении a месяцев и получил m руб., а второй взял вклад по истечении b месяцев и получил n руб. Сколько каждый из них положил в сберкассу и сколько процентов начислила сберкасса?

307. В трех сосудах находится одинаковая жидкость в неравных количествах. Если половину содержимого (по объему) одного сосуда разлить поровну в два других, а затем половину содержимого другого сосуда, оказавшегося после первого разлива, разлить поровну в два других и после этого половину содержимого третьего сосуда разлить поровну в два других, то во всех сосудах окажется жидкости поровну, а именно по 16 *л*. Сколько было литров жидкости в каждом сосуде вначале? (Задачу решить арифметически.)

308. Товарный поезд прошел путь от Ленинграда до Москвы со средней скоростью 20 *км/час*, а от Москвы до Ленинграда со средней скоростью 30 *км/час*. Какова средняя скорость поезда на всем пути (время, потраченное на остановку в Москве, в расчет не принимается)?

309. Доказать, что разность между любым числом и числом, изображенным теми же цифрами, но написанными в обратном порядке, делится нацело на 9.

IV.

ПРОГРЕССИИ*

310. Могут ли числа $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{8}$ быть членами (не обязательно соседними) арифметической прогрессии?

311. Доказать, что в арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ любые четыре члена a_m, a_n, a_k, a_l, для которых $m+n=k+l$, связаны соотношением

$$a_m+a_n=a_k+a_l.$$

312. Доказать, что три члена a_{n-1}, a_n, a_{n+1} арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ связаны соотношением

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

313. Найти сумму двадцати членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$, если $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$.

314. Найти арифметическую прогрессию $a_1, a_2, \ldots$, если $a_1+a_2+a_3=9$ и $a_1a_2a_3=15$.

315. Найти арифметическую прогрессию, если сумма n ее членов $S_n=2n^2-3n$.

316. Найти десятый член арифметической прогрессии, если сумма n ее членов $S_n=3n^2-2n$.

317. Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма любого числа членов, начиная с первого, в четыре раза больше квадрата числа членов.

318. Число членов арифметической прогрессии равно 10. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 15, а на нечетных — 12,5. Найти все члены прогрессии.

319. Дано, что в арифметической прогрессии $a_p=q$, $a_q=p$ (a_n — n-й член прогрессии). Найти a_m.

320. Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что числа

$$\frac{1}{b+c}, \quad \frac{1}{c+a}, \quad \frac{1}{a+b}$$

также образуют арифметическую прогрессию.

321. Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, заключающихся между целыми числами m и n ($m<n$).

322. Доказать, что если в арифметической прогрессии $S_m=S_n$, где S_k—сумма первых k членов прогрессии, то $S_{m+n}=0$.

---

* Во всех приведенных здесь задачах на прогрессии подразумевается, что члены прогрессий — вещественные, если специально не оговорено противное.

323. Дано, что в арифметической прогрессии

$$\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}.$$

Доказать, что

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}.$$

324. Параллелограмм пересекается двумя рядами прямых, параллельных его сторонам. Каждый ряд состоит из m линий. Сколько всех возможных параллелограммов можно составить из этих линий?

325. Числа 3, 5, 9, 15, ... таковы, что разности между ними образуют арифметическую прогрессию. Найти n-й член этой последовательности чисел.

326. Вычислить сумму

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{m-1}m^2.$$

327. Какие из последовательностей

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots;\ 2, 2, 2, \ldots;\ 3, -3, 3, \ldots;\ 2, 0, 0, \ldots$$

являются геометрическими прогрессиями?

328. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами (не обязательно соседними) геометрической прогрессии?

329. Доказать, что в геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ любые четыре члена a_m, a_n, a_k, a_l, для которых $m+n=k+l$, связаны соотношением

$$a_m a_n = a_k a_l.$$

330. Доказать, что три члена a_{n-1}, a_n, a_{n+1} геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ связаны соотношением

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}.$$

331. Если числа x, y, z составляют геометрическую прогрессию, то

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2.$$

332. Найти сумму n чисел вида

$$5,\ 55,\ 555,\ 5555,\ \ldots$$

333. Доказать, что

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}\ \underbrace{55\ldots56}_{k-1}=\underbrace{33\ldots34}_{k-1}{}^2.$$

334. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 3,5. Сумма квадратов тех же членов равна 5,25. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

335. В арифметической прогрессии даны ее члены $a_{m+n}=A$ и $a_{m-n}=B$. Найти ее члены a_m и a_n.

336. В геометрической прогрессии даны ее члены $a_{m+n}=A$ и $a_{m-n}=B$. Найти ее члены a_m и a_n.

337. Доказать, что если числа a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию, то

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2.$$

338. Найти сумму

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2.$$

339. Доказать, что

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n=$$
$$=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1}).$$

340. Найти произведение n первых членов геометрической прогрессии с положительными членами, зная их сумму S и сумму S_1 их обратных величин.

341. Найти сумму

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n.$$

342. Известно, что сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии есть предел S_n при $n\to\infty$, где n — сумма первых членов прогрессии. Нужно ли это доказывать?

343. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов — 40,5. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

344. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов ее членов равна $-\frac{108}{13}$. Написать три первых члена этой прогрессии.

345. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, стоящих на нечетных местах, равна 36, а сумма ее членов, стоящих на четных местах, равна 12. Найти эту прогрессию.

346. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 1. Каждый же из остальных членов в $2\frac{1}{6}$ раза меньше суммы двух смежных с ним. Найти сумму этой прогрессии.

347. Найти бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1 и каждый член в три раза больше суммы всех следующих за ним членов.

348. Сумма первых четырех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 15. Сумма первого и четвертого членов в 1,5 раза больше суммы второго и третьего. Найти сумму прогрессии.

349. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, зная, что сумма ее первых шести членов составляет $\frac{7}{8}$ суммы всех ее членов.

350. В арифметической прогрессии 11 членов. Первый член равен 24. Первый, пятый и одиннадцатый члены составляют геометрическую прогрессию. Написать все члены арифметической прогрессии.

351. В арифметической прогрессии, состоящей из 9 членов, первый член равен 1, а сумма равна 369. Геометрическая прогрессия тоже содержит 9 членов, причем первый и последний члены ее совпадают с соответствующими членами данной арифметической прогрессии.

Найти седьмой член геометрической прогрессии.

352. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член увеличить на 8, то данная прогрессия обратится в арифметическую, но если затем третий член будет увеличен на 64, то она опять обратится в геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

353. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия.

Найти неизвестное число.

354. Три числа, сумма которых 114, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как первый, четвертый и двадцать пятый члены арифметической прогрессии. Найти эти числа.

355. Из точек A и B одновременно начали двигаться два тела навстречу друг другу. Первое в первую минуту прошло 1 *м*, а в каждую последующую проходило на 0,5 *м* больше, чем в предыдущую. Второе тело проходило каждую минуту по 6 *м*. Через сколько минут оба тела встретились, если расстояние между A и B равно 117 *м*?

356. Возможны ли три таких числа a_1, a_2, a_3, чтобы они были одновременно первыми, вторыми и третьими членами арифметической и геометрической прогрессии?

357. В многочлене $ax^4+bx^3+4x^2+dx+l$ коэффициенты a, b и 4 образуют геометрическую прогрессию, а 4, a и b — арифметическую. Многочлен делится на $1+x+x^2$. Найти частное от деления первого многочлена на второй.

358. Даны две прогрессии: арифметическая

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n,\ \ldots$$

и геометрическая

$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ ,\ b_n,\ \ldots\ ,$$

в которых $a_1=b_1$ и $a_2=b_2$. Обе прогрессии возрастающие, и все члены этих прогрессий положительны. Доказать, что все члены арифметической прогрессии, начиная с a_3, меньше соответствующих членов геометрической прогрессии.

V.

ЛОГАРИФМЫ

а) ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

359. Почему $a^{\log_a x}=x$?

360. Что больше, $\log_a 2$ или $\log_a 3$?

361. Доказать, что $\log_b a \log_a b=1$.

362. Доказать, что $\log_b a=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

363. Когда верна формула $\log a^2=2\log(-a)$?

364. Доказать, что

$$\log\frac{2a+3b}{5}=\frac{\log a+\log b}{2},$$

если $13ab=4a^2+9b^2$.

365. Доказать, что

$$\log\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log a+\log b),$$

если $a^2+b^2=7ab$.

366. Доказать, что

$$\log_{b+c} a+\log_{c-b} a=2\log_{b+c} a \log_{c-b} a,$$

если $a^2+b^2=c^2$.

367. Вычислить $\log_8 9{,}8$, зная, что $\log_{10} 2=a$ и $\log_{10} 7=b$.

368. Доказать, что $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N}=1+\log_a b$.

369. Доказать, что $a\dfrac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}=\log_b a$.

370. Доказать, что $\log_b a=\log_{b^n} a^n$.

371. Что больше, $\log_4 3$ или $\log_{16} 9$?

372. Вычислить $\log_{\sqrt{3}} 8$, зная, что $\log_{12} 3=a$.

373. Доказать, что

$$\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x=\frac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} x}+\dfrac{1}{\log_{a_2} x}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

374. Дано: $y=10^{\frac{1}{1-\log_{10} x}}$; $z=10^{\frac{1}{1-\log_{10} y}}$.

Доказать: $x=10^{\frac{1}{1-\log_{10} z}}$.

375. Доказать, что если a, b и c — три последовательных члена геометрической прогрессии, неравные между собой, то

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=\frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

376. Доказать, что если $\log_k x$; $\log_m x$; $\log_n x$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$n^2=(kn)^{\log_k m}.$$

377. Доказать, что если

$$n^2=(kn)^{\log_k m},$$

то $\log_k x$; $\log_m x$; $\log_n x$ образуют арифметическую прогрессию.

378. Найти ошибку в следующем «доказательстве»: так как $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^3<\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2$;

$$3\log_{10}\frac{1}{2}<2\log_{10}\frac{1}{2};\quad 3<2.$$

б) ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Выяснить, являются ли равносильными уравнения (379—384):

379. $\log P(x)=\log Q(x)$ и $P(x)=Q(x)$.

380. $\log P(x)+\log Q(x)=R(x)$ и $\log [P(x)\,Q(x)]=P(x)$.

381. $\log P(x)-\log Q(x)=R(x)$ и $\log\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)$.

382. $n\log P(x)=Q(x)$ и $\log [P(x)]^n=Q(x)$; n—четное число.

383. $a^x=a^y$ и $x=y$; $(a>0)$.

384. $\log_3(x^2-1)=1$ и $\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=1$.

385. Ученик решает уравнение $\log(x-1)^2=2\log 3$ так: $2\log(x-1)=2\log 3$; $\log(x-1)=\log 3$; $x-1=3$; $x=4$. Нетрудно проверить, что $x=4$ удовлетворяет уравнению. Но кроме этого корня, уравнение имеет еще и корень $x=-2$. Почему он был потерян?

Решить уравнения (386—408):

386. $(\log_x\sqrt{5})^2-\log_x 5\sqrt{5}+1{,}25=0$.

387. $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{\frac{1}{x}}=2$.*

388. $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}}=-\sqrt{6}\log_x\sqrt{5}$.

* Знаком $\lg x$ обозначается десятичный логарифм числа x.

389. $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5.$

390. $x^{2\lg^3 x-1{,}5\lg x}=\sqrt{10}.$

391. $x^{\lg^2 x+\lg x^3+3}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$

392. $\sqrt{2\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}.$

393. $\log_2\sqrt{x^2}=1.$

394. $\log_2(x+1)^2+\log_2|x+1|=6.$

395. $x^{\log_x(x-2)^2}=9.$

396. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)}=9.$

397. $x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}=a^{\log_{a^2}4};\ (a>0).$

398. $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}\log_5 x}=-1.$

399. $2\log_x 3\cdot\log_{3x}\cdot 3=\log_{9\sqrt{x}}3.$

400. $\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ax}+\log_x\sqrt[4]{ax}+\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{a}{x}}}}=a.$

401. $\log_a x\cdot\log_b c\cdot(1+\log_c a)=\log_b x\cdot\log_c x\cdot\log_a c.$

402. $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x=6.$

403. $\log_8 x+(\log_8 x)^2+(\log_8 x)^3+\ldots=\dfrac{1}{2}.$

404. $\dfrac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}}=3.$

405. $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}.$

406. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6.$

407. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$

408. $27^x+12^x=2\cdot 8^x$.

Решить системы уравнений (409—424):

409. $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1; \\ \lg y-\lg|x|=\dfrac{1}{\log_4 100}. \end{cases}$

410. $\begin{cases} \log_a x-\log_{a^2} y=m; \\ \log_{a^2} x-\log_{a^3} y=n. \end{cases}$

411. $\begin{cases} (\log_a x+\log_a y-2)\log_{\frac{4}{9}} a=-1; \\ x+y-5a=0. \end{cases}$

412. $\begin{cases} \log_{\sqrt{10}}(x^2+y^2)=2\log_{10}(2a)+2\log_{100}(x^2-y^2); \\ xy=a^2. \end{cases}$

413. $\begin{cases} xy=40; \\ x^{\lg y}=4. \end{cases}$

414. $\begin{cases} 5^{2x}\cdot 3^y=675; \\ \log^3_{\sqrt{2}}(x+y)=6. \end{cases}$

415. $\begin{cases} y^{x^2+7x+12}=1; \\ x+y=6; \quad y>0. \end{cases}$

416. $\begin{cases} 8^x=10y; \\ 2^x=5y. \end{cases}$

417. $\begin{cases} x^{x+y}=y^{12}; \\ y^{x+y}=x^3. \end{cases}$

418. $\begin{cases} x^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=y^{\frac{8}{3}}; \\ y^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=x^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$

419. $\begin{cases} x^m=y^n; \\ \log_p \dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_p x}{\log_p y}. \end{cases}$

420. $\begin{cases} x^y=y^x; \\ a^x=b^y; \quad (a\neq 1,\ b\neq 1). \end{cases}$

421. $\begin{cases} x^y = y^x; \\ x^m = y^n. \end{cases}$

422. $\begin{cases} (1+y)^x = 100; \\ (y^4-2y^2+1)^{x-1} = \dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}. \end{cases}$

423. $\begin{cases} x^{\frac{z}{3}} = \sqrt[15]{y^8}; \\ y^{\frac{z}{3}} = \sqrt[15]{x^2}; \\ 5z = 9(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \end{cases}$

424. $\begin{cases} z = \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}; \\ x^z = y^{\frac{8}{3}}; \\ y^z = x^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$

VI.

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

425. Найти m и n, если

$$C_{n+2}^m : C_{n+2}^{m+1} : C_{n+2}^{m+2} = 0{,}6 : 1 : 1.$$

426. Доказать, что

$$C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}.$$

427. Собрание, на котором присутствует 30 человек, в том числе две женщины, выбирает четырех человек для работы на избирательном участке. Сколько может встретиться случаев, когда в число избранных войдут обе женщины?

428. Нужно распределить преподавание в шести классах между тремя преподавателями. Сколькими способами можно произвести это распределение, если каждый должен получить два класса?

429. В вещевой лотерее разыгрывается 5 предметов. Первый подошедший к урне вынимает из нее 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы 3 из них оказались выигрышными? Всего в урне 100 билетов.

430. Экскурсанты разделились на две равные группы для розыска заблудившегося товарища. Среди них есть только 4 человека, знакомых с местностью. Каким числом способов они мо-

гут разделиться так, чтобы в каждую группу вошло 2 человека, знакомых с местностью, если всего их 16 человек?

431. Комсомольцы строительной организации выделили в помощь подшефному детскому дому бригаду в 5 человек. В составе комсомольской организации 25 человек, в том числе 5 маляров, 4 плотника и 2 штукатура. Каким числом способов можно укомплектовать бригаду, чтобы в нее вошли рабочие всех этих специальностей по одному?

432. Для культпохода куплено $2n$ билетов в театр на места, находящиеся в одном ряду партера (в ряде $2n$ мест). Сколькими способами можно распределить эти билеты между лицами данной компании, состоящей из n мужчин и n женщин, чтобы не сидели рядом двое мужчин или две женщины?

433. Девять из десяти карт, среди которых есть червонный туз, раздаются трем лицам так, что первый получает 3, второй 4, а третий 2. Сколько существует способов раздачи, при которых червонный туз попадает к третьему лицу?

434. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если в каждое число входит каждая из данных цифр не более одного раза?

435. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если цифры 0, 1, 2 входят в каждое число не более одного раза, а цифра 3 — не более двух раз?

436. Сколько различных пятизначных чисел, больших 20 000, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если цифры 2, 3, 4 входят в каждое число по одному разу, а цифра 1 — два раза?

437. Сколько различных пятизначных чисел без повторения цифр можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы четные цифры не стояли рядом?

438. Найти коэффициент при x^4 в выражении

$$x(1-x)^4+x^2(1+2x)^8+x^3(1+3x)^{12},$$

не выписывая лишних членов.

439. Доказать, что $11^{10}-1$ делится на 100.

440. Доказать, что коэффициент при x^s в разложении по степеням x выражения

$$[(s-2)x^2+nx-s](x+1)^n$$

равен nC_n^{s-2}.

441. Доказать, что

$$1^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

442. В разложении $\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальный коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго. Найти свободный член.

443. В разложении $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ сумма коэффициентов на 240 меньше суммы коэффициентов разложения $(a+b)^{2n}$. Найти третий член первого разложения.

444. Сколько рациональных членов содержится в разложении

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{100}?$$

445. Найти все рациональные члены разложения $\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$, не выписывая члены иррациональные.

446. Найти все те значения n, при которых какие-либо три последовательных коэффициента разложения бинома $(x+a)^n$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

447. Найти показатель n бинома $(x+2)^n$, зная, что десятый член разложения этого бинома имеет наибольший коэффициент.

448. Доказать, что наибольший коэффициент разложения $(a+b)^{2n}$ есть число четное.

449. Найти наибольший член разложения $(1+\sqrt{2})^{50}$.

450. Определить номер наибольшего члена разложения $(p+q)^n$ по убывающим степеням буквы p, предполагая, что $p>0$; $q>0$; $p+q=1$. При каких условиях: а) наибольший член будет первый? б) наибольший член будет последний? в) разложение будет содержать два одинаковых последовательных члена, превышающих все остальные члены разложения?

451. В разложении $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^6$ найти свободный член, не выписывая членов, зависящих от x.

452. В разложении $(1+x-x^2)^{25}$ найти тот член, у которого показатель степени x в три раза больше суммы всех коэффициентов разложения.

453. Найти коэффициент при x^3 в выражении

$$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\ldots+(1+x)^{15}.$$

454. Доказать:

$$(1+x)^n+(1+x)^{n-1}x+(1+x)^{n-2}x^2+\ldots+(1+x)x^{n-1}+x^n=$$

$$(n+1)x^n+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}x^{n-1}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-2}+\ldots+1,$$

n — натуральное число.

455. Разложить по убывающим степеням $x-2$ многочлен

$$x^4-11x^3+43x^2-72x+45.$$

VII.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Доказать тождества (456—484):

456. $\sin 4\alpha+\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

457. $\operatorname{tg} 3\alpha=\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60°+\alpha)\operatorname{tg}(60°-\alpha)$.

458. $\operatorname{tg}(35°+\alpha)\operatorname{tg}(25°-\alpha)=\dfrac{2\cos(10°+2\alpha)-1}{2\cos(10°+2\alpha)+1}$.

459. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha+\sec 2\alpha$.

460. $\sin x\left(1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)=\operatorname{tg} x$.

461. $\operatorname{tg} 3\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha$.

462. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg} 2\alpha-4\operatorname{tg} 4\alpha=8\operatorname{ctg} 8\alpha$.

463. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha=1, \quad \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

464. $\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma=$
$=(-1)^{n+1}4\cdot\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, n — целое число.

465. $\operatorname{tg} n\alpha+\operatorname{tg} n\beta+\operatorname{tg} n\gamma=\operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, n — целое число.

466. $\dfrac{\sin y+\sin x\cos(x+y)}{\cos y-\sin x\sin(x+y)}=\operatorname{tg}(x+y)$.

467. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$.

468. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta=1$.

469. $4\sin\alpha\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)=\sin 3\alpha$.

470. $16\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°\sin 90°=1$.

471. $\sin 10°\sin 20°\sin 30°\sin 40°\cos 10°\cos 20°\times$
$\times\cos 30°\cos 40°=\dfrac{3}{256}$.

472. $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}$.

473. $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}=0{,}125$.

474. $\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 175^\circ = -\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$.

475. $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.

476. $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

477. $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

478. $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$.

479. $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2}$.

480. $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ = \sin 25^\circ \sin 30^\circ \operatorname{cosec} 5^\circ$.

481. $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = 1$.

482. $1 + 2\cos 7x = \frac{\sin 10{,}5x}{\sin 3{,}5x}$.

483. $4\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$.

484. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Привести к виду, удобному для логарифмирования (485—492):

485. $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$.

486. $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

487. $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$.

488. $\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha$.

489. $\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$.

490. $2\cos 10^\circ \cos 20 - 2\cos 30^\circ + \sin 40^\circ$.

491. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$.

492. $\sin 70^\circ + 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

Выяснить, при каких α справедливы равенства (493—502):

493. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

494. $\sqrt{1+\sin 2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$.

495. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{cosec}\alpha$.

496. $\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}}=\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.

497. $\sqrt{\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.

498. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2}=\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$.

499. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2\sec\alpha$.

500. $\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}=2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

501. $\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}=-2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

502. $\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}(\operatorname{ctg}^2\alpha+2)$.

503. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{7}$; $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, то $\alpha+2\beta=45°$ (α и β — острые углы).

504. Выяснить, при каких x справедливы равенства:

а) $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$; б) $\operatorname{tg}^2 x+1=\sec^2 x$;

в) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$; г) $\sin(\pi-x)=\sin x$.

505. При каких x верна формула

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}?$$

506. Что больше, $\sin\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$? $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

507. Какая из тригонометрических функций (прямых) может принять значение $\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}$? ($a>0$, $b>0$).

508. Что больше, $\sin 1$ или $\sin 1°$?

509. Найти наименьшее значение выражения $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

510. Что больше, $\sin(\alpha+\beta)$ или $\sin\alpha+\sin\beta$? $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$.

511. Что больше, $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$? $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$.

512. Синусом числа x называется число, равное синусу угла в x радианов. Это определение синуса числа x. Можно ли было условиться называть синусом числа x число, равное синусу угла в x градусов?

513. Правильно ли называть радианное измерение отвлеченным?

514. В каких интервалах изменения x функция $\operatorname{tg} x$ возрастает?

515. Для тангенса половинного угла существуют следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \text{ и } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Вторую можно получить из первой, если умножить числитель и знаменатель подкоренного выражения на $1+\cos\alpha$, заменить $1-\cos^2\alpha$ на $\sin^2\alpha$ и извлечь корень из дроби. В результате получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Почему же можно не писать знаки $+$ и $-$ в правой части?

516. Найти $\sin 18°$, пользуясь равенством $\sin 36°=\cos 54°$.

517. Найти сумму

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha.$$

518. Найти сумму

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha.$$

519. Доказать, что если

$$A_1=A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha;$$

$$B_1=2C\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-2A\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$C_1=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha,$$

то

$$B_1^2+4A_1C_1=B^2-4AC.$$

520. Доказать, что если

$$5\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta),$$

то

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3}{2}.$$

521. Дано, что равенство

$$a_1\cos(\alpha_1+\varphi)+a_2\cos(\alpha_2+\varphi)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+\varphi)=0$$

имеет место при $\varphi=0$ и при некотором $\varphi=\varphi_0\neq k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). Доказать, что при этих условиях написанное равенство справедливо при всяком φ.

522. Доказать, что если

$$\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha},$$

то

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

523. Доказать, что если

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\varphi=\cos\gamma\cos\Theta;\quad \sin\alpha=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\Theta}{2},$$

то

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2};\ \left(\alpha\neq\frac{2k+1}{2}\pi;\ k=0, \pm1, \pm2, \ldots\right).$$

524. Доказать, что если

$$\cos(\Theta-\alpha)=a \text{ и } \sin(\Theta-\beta)=b,$$

то

$$a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta).$$

525. Доказать, что если

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\varphi)}{b}=\frac{\cos(x+2\varphi)}{c}=\frac{\cos(x+3\varphi)}{d},$$

то

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}.$$

526. Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$, если

$$\sin\alpha+\sin\beta=p \text{ и } \cos\alpha+\cos\beta=q.$$

527. Доказать, что если углы α, β и γ треугольника связаны зависимостью

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2},$$

то треугольник правильный.

528. Доказать, что если стороны треугольника a, b и c составляют арифметическую прогрессию, то $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$, где A, B и C — углы треугольника, противолежащие сторонам a, b и c, также составляют арифметическую прогрессию.

529. Найти зависимость между углами A, B и C, если известно, что

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Найти затем при этом условии наименьшие положительные значения углов, если, кроме того, дано, что угол A равен полусумме углов B и C, а угол C равен сумме углов A и B.

530. Дано: $A+B+C=\pi$, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$. Доказать: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

531. Исключить Θ из уравнений:

$$\cos(\alpha-3\Theta)=m\cos^3\Theta;$$
$$\sin(\alpha-3\Theta)=m\sin^3\Theta.$$

532. Исключить Θ и φ из уравнений:
$a\sin^2\Theta+b\cos^2\Theta=1$; $a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi=1$; $a\operatorname{tg}\Theta=b\operatorname{tg}\varphi$; $a\neq b$.

533. Упростить выражение

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}+\frac{6}{\cos^2 x}+4\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\right).$$

534. Доказать, что если α, β и γ — острые углы и $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, то $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

535. Доказать: для рациональности $\sin x$ и $\cos x$ необходимо и достаточно, чтобы был рационален $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

536. Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, то равенство $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

537. Пользуясь тригонометрическими функциями, доказать, что из равенств

$$a^2+b^2=1 \text{ и } \alpha^2+\beta^2=1$$

следует неравенство

$$|a\alpha+b\beta|\leqslant 1.$$

538. Главные значения $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ берутся из интервала от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Можно ли было бы взять для них интервал от 0 до π?

539. Доказать равенства:

а) $\operatorname{arc}\sin x+\operatorname{arc}\cos x=\frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arc}\operatorname{tg}+\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x=\frac{\pi}{2}$.

540. Доказать равенства:

а) $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$;

б) $\operatorname{arc\,ctg}(-x)=\pi+\operatorname{arc\,ctg} x$.

541. Доказать равенства:

а) $\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$;

б) $\sin(\operatorname{arc\,tg} x)=\cos(\operatorname{arc\,ctg} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\sin(\operatorname{arc\,ctg} x)=\cos(\operatorname{arc\,tg} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\operatorname{ctg}(\arccos x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

д) $\operatorname{tg}(\arccos x)=\operatorname{ctg}(\arcsin x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

е) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x)=\dfrac{1}{x}$.

542. Доказать равенства $(x>0)$:

а) $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

б) $\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\operatorname{arc\,tg} x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{x}$;

г) $\operatorname{arc\,ctg} x=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$,

543. Чему равен $\arccos\left(\cos\dfrac{6}{5}\pi\right)$?

544. Чему равен $\arcsin(\sin x)$?

545. Чему равен $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$?

546. Доказать равенство

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}.$$

547. Доказать, что

$$\arcsin\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\pi-x,$$

если $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$.

548. Доказать, что

$$2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi,$$

если $x>1$.

549. Доказать, что

$$\sin\left(\frac{3}{2}\arcsin x\right)=\frac{x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}}.$$

550. Доказать, что

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{|x|}{\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}}.$$

551. Доказать, что $\cos(7\arccos x)$ есть многочлен 7-й степени относительно x*.

Доказать равенства (552—554):

552. $\cos(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)=\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.

При каких x и y оно имеет смысл?

553. $\operatorname{tg}(2\arcsin x)=\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

При каких x оно имеет смысл?

554. $\sin(2\operatorname{arctg}x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

При каких x оно имеет смысл?

555. Вычислить выражение

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+\cos(\operatorname{arctg}2\sqrt{3}).$$

556. Вычислить выражение

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right).$$

---

* Выражение вида $\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arg\cos x)$, где n — натуральное число, является многочленом относительно x и называется многочленом или полиномом П. Л. Чебышева.

557. Проверить равенство

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

558. Вычислить сумму

$$\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3.$$

559. Доказать, что сумма

$$\arcsin x+3\arccos x+\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

не зависит от x, если $x^2<\frac{1}{2}$.

560. Доказать:

$$\arcsin x+\arcsin y=\eta\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)+\varepsilon\pi,$$

где

$\eta=1$, $\varepsilon=0$, если $xy\leqslant 0$ или $x^2+y^2\leqslant 1$;
$\eta=-1$, $\varepsilon=-1$, если $x^2+y^2>1$ и $x<0$, $y<0$;
$\eta=-1$, $\varepsilon=1$, если $x^2+y^2>1$ и $x>0$, $y>0$.

561. Доказать, что

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$$

562. Доказать, что

$$\arccos x+\arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\frac{\pi}{3},$$

если $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$.

563. Доказать:

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi,$$

где

$\varepsilon=0$, если $xy<1$;
$\varepsilon=-1$, если $xy>1$ и $x<0$;
$\varepsilon=1$, если $xy>1$ и $x>0$.

Доказать равенства (564—569):

564. $\arcsin\frac{5}{13}+2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}$.

565. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

566. $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

567. $2 \operatorname{arc\,tg} 10 + \operatorname{arc\,sin} \frac{20}{101} = \pi$.

568. $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, если $x > 0$.

569. $\operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, если $x < 0$.

VIII.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решить уравнения (570—628):

570. $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$.

571. $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$.

572. $\operatorname{tg} \frac{3}{5} x \operatorname{ctg} \frac{5}{3} x = 1 - \sec \frac{3}{5} x \operatorname{cosec} \frac{5}{3} x$.

573. $\sin(x + 25°) \sin(x - 20°) = \sin(70° + x) \sin(65° - x)$.

574. $\operatorname{tg}(x + 30°) \operatorname{tg}(x - 60°) = 1$.

575. $\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0$.

576. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

577. $\sin 3x = \cos x - \sin x$.

578. $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$.

579. $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$.

580. $\cos 5x + \cos 3x + \sin 5x + \sin 3x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4\right)$.

581. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

582. $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$.

583. $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}$.

584. $\sin 2x \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \sin 4x + \cos^2 4x$.

585. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

586. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

587. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$.

588. $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$.

589. $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$.

590. $\cos^4 x+\sin^4 x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0$.

591. $2\sin 2x=3(\sin x+\cos x)$.

592. $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$.

593. $\sin^{10} x+\cos^{10} x=\frac{29}{16}\cos^4 2x$.

594. $\cos^2 x\cos 2x+\cos 4x+\cos 3x\cos x+2\cos^4 x=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$.

595. $\operatorname{tg} 5x=\operatorname{tg} x\operatorname{tg}(60^\circ-x)\operatorname{ctg}(30^\circ-x)$.

596. $\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$.

597. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x=0$.

598. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x$.

599. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 4x=0$.

600. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\sin x\left(\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$.

601. $\sec\sqrt{x}+\operatorname{cosec}\sqrt{x}=2\sqrt{2}$.

602. $\operatorname{tg}(x^2-x)\operatorname{ctg} 6=1$.

603. $|\sin x^2|=1$.

604. $\sin|x|=1$.

605. $\cos x^2=1$.

606. $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}$.

607. $\sin 2x\sin 6x=1$.

608. $(\sec x+\operatorname{cosec} x)\sqrt{2}=\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x$.

609. $\sin 3x+\sin 2x=m\sin x$.

610. $\sin\left(\frac{5}{3}\pi\cos\pi x\right)=\frac{1}{2}$.

611. $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$.

612. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg} x)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{ctg} x)$.

613. $\sin^2 2^{\sqrt{-x}}=\frac{1}{2}$.

614. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

615. $x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0$.

616. $2 \arccos x = 6{,}3$.

617. $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \arcsin x = \frac{\pi}{4}$.

618. $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$.

619. $2 \arcsin x = \arccos 2x$.

620. $2 \arccos x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

621. $\arcsin x = 2 \arcsin x\sqrt{2}$.

622. $\arccos x - \arcsin x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

623. $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.

624. $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x$.

625. $\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} + \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}$.

626. $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{4}{3}\pi$.

627. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{a-b}{a+b}$.

628. $\arcsin x = \arcsin a + \arcsin b$.

Решить системы уравнений (629—631):

629. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

630. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}; \\ x + y = 75°. \end{cases}$

631. $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \sin y; \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \operatorname{tg} y. \end{cases}$

IX.

НЕРАВЕНСТВА

Решить неравенства (632—642):

632. $\frac{mx+n}{a+b}-\frac{px+q}{a-b}<\frac{mx-n}{a-b}+\frac{px-q}{a+b}$.

633. $\frac{7x-5}{8x+3}>4$.

634. $\frac{x+1}{x-2}>\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2}$.

635. $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

636. $x^3+5x^2+3x-9>0$.

637. $2x^3>x+1$.

638. $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$.

639. $x^4-6x^3+11x^2-6x<0$.

640. $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)}>0$.

641. $\frac{(x^3-1)(x+2)^2(x-5)}{x^2(x^2-9)(x^4+1)}>0$.

642. $x^4+x^3-7x^2+ax+b>0$, если $x=1$ и $x=-3$ являются корнями многочлена, стоящего в левой части равенства.

643. Каково должно быть k для того, чтобы оба корня уравнения

$$(k-1)x^2-2kx+k+3=0$$

были положительны?

644. Каково должно быть k для того, чтобы при любом x значение трехчлена

$$(2k-1)x^2+(7k+2)x-3k$$

было больше значения трехчлена

$$(k+3)x^2+5(k+1)x-4(k+1)$$

при том же значении x?

645. Каким должно быть λ, чтобы при $k>0$ и при всяком x выполнялось неравенство

$$\frac{2kx^2+2\lambda x+\lambda}{4x^2+6x+3}>k?$$

646. Доказать, что если a, b и c — стороны треугольника, то при всяком x

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0.$$

647. Доказать неравенство Буняковского

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

648. Определить a так, чтобы все корни уравнения

$$\frac{x^2}{x^2-p^2}+\frac{x^2}{x^2-q^2}=a$$

были вещественные. При этом $p\neq0$; $q\neq0$; $a\neq0$.

Решить неравенства (649—653):

649. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}}>1.$

650. $\sqrt{3-x}>x-2.$

651. $\sqrt{3x-5}>\sqrt{x-4}.$

652. $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}.$

653. $4(x-1)<\sqrt{(x+5)(3x+4)}.$

Решить системы (654—659):

654. $\begin{cases}3x-1>x+3y;\\ x(1-3x)>4x-3x^2-2y.\end{cases}$

655. $\begin{cases}3x+2y>7;\\ 4y+2x>3.\end{cases}$

656. $\begin{cases}3x+2y>4;\\ x-6y>-5.\end{cases}$

657. $\begin{cases}5x+3y>121;\\ 7x+4y=168.\end{cases}$

658. $\begin{cases}y>x^2;\\ x>y^2.\end{cases}$

659. $\begin{cases}3x+2y=6;\\ x^2+y^2>4;\\ xy<1.\end{cases}$

660. Доказать, что если $|a|<b$, то $-b<a<b$.

661. Доказать, что если $-b<a<b$, то $|a|<b$.

662. Доказать, что $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

663. Доказать, что $|a-b| \geqslant |a|-|b|$.

664. Каково должно быть k для того, чтобы неравенство

$$\left|\frac{x^2-kx-1}{x^2+x+1}\right|<3$$

было справедливо при любом значении x?

665. Доказать, что при $a>0$ и $b>0$

$$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}.$$

666. Доказать, что если $a>b>0$ и $m>n$, то

$$\frac{a^m-b^m}{a^m+b^m}>\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}.$$

667. Доказать, что арифметическая дробь с увеличением числителя и знаменателя на одно и то же положительное число увеличивается, если она правильная, и уменьшается, если она неправильная.

668. Доказать, что дробь

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

заключена между наименьшей и наибольшей из дробей

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}; \quad (b_k>0,\ k=1, 2, \ldots, n).$$

Доказать неравенства (669—671):

669. $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2.$

670. $\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{y^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{x}+\sqrt{y};\ x\neq y.$

671. а) $\dfrac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2};$

б) $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4};$

$(a_1 \geqslant 0,\ a_2 \geqslant 0,\ a_3 \geqslant 0,\ a_4 \geqslant 0).$

672. Разложить данное положительное число a на два положительных слагаемых так, чтобы их произведение оказалось наибольшим.

673. Желают устроить прямоугольную площадку так, чтобы с трех сторон она была отгорожена проволочной сеткой, а четвертой стороной примыкала бы к длинной стене. Если имеется

100 *м* сетки, то какими должны быть стороны площадки с наибольшей площадью?

674. Из круговых секторов данного периметра найти сектор наибольшей площади.

675. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Дан периметр фигуры. Каковы должны быть ее размеры, чтобы окно пропускало наибольшее количество света?

676. Около шара радиуса R описать конус наименьшего объема.

677. Данное положительное число a разложить на два положительных сомножителя так, чтобы их сумма оказалась наименьшей.

678. На странице книги печатный текст должен занимать (вместе с промежутками между строк) 216 *см*^{2}. Верхнее и нижнее поля должны быть шириною по 3 *см*, а правое и левое по 2 *см*. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

679. Доказать, что

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c),$$
$$(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0).$$

680. Доказать, что если a_1, a_2, ..., a_n неотрицательны, то

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

681. Доказать, что если a_1, a_2, ..., a_n положительны и $a_1a_2 \ldots a_n = 1$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

682. Доказать, что если $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $a_3 \geqslant 0$, то

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3}.$$

683. Доказать, что

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n};$$
$$(a_1 \geqslant 0,\ a_2 \geqslant 0, \ldots, a_n \geqslant 0).$$

684. Данное положительное число a разложить на n положительных слагаемых так, чтобы их произведение оказалось наибольшим.

685. В данный шар вписать цилиндр наибольшего объема.

Доказать неравенства (686—691):

686. $2^n > 1+n\sqrt{2^{n-1}}$; $(n>1)$.

687. $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; $(n>1)$.

688. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<3$.

689. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!<(n+1)!$

690. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$.

691. $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\geqslant\sqrt{n}$.

692. Наборщик рассыпал некоторое число, представляющее шестую степень натурального числа. Его цифры: 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9. Какое это число?

693. Газ в количестве a $м^3$ последовательно пропускают через n фильтров, каждый из которых поглощает $p\%$ общего объема примесей, содержащихся в газе, поступающем в рассматриваемый фильтр. Затем газ поступает в резервуар, где находится b $м^3$ газа, содержащего $q\%$ (по объему) примесей. Какой процент примесей (по объему) допустим для газа до его очистки, если число процентов примесей в газовой смеси в резервуаре не должно превышать r?

694. Вклад в A руб. положен в сберегательную кассу по $p\%$ годовых. В конце каждого года вкладчик берет B руб. Через сколько лет после взятия соответствующей суммы остаток будет не меньше утроенного первоначального вклада? При каких условиях задача имеет решение?

695. Непромытый золотой песок содержит $k\%$ чистого золота. После каждой промывки песка отходит $p\%$ содержащихся в нем примесей и теряется $q\%$ имеющегося в песке золота. Сколько следует сделать промывок, чтобы число процентов содержания чистого золота в золотом песке было не меньше чем r?

696. В резервуар, содержащий A $л$ воды, вливают a $л$ $p\%$-ного (по объему) раствора спирта, а затем, после перемешивания, через другую трубу выливают a $л$ образующейся смеси. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы в резервуаре получился раствор спирта, крепостью не менее $q\%$?

697. Найти наименьшее и наибольшее значение выражения

$$a\cos x+b\sin x.$$

698. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x,$$

$c\neq a$.

699. Доказать, что если A, B и C — углы остроугольного треугольника, то

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2.$$

700. При каких x справедливо неравенство

$$\frac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}>0?$$

701. Решить неравенство $\sin(\cos x)<0$.

702. Решить неравенство $\lg \sin x\leqslant 0$.

703. Найти те значения x, при которых $\cos(\sin x)$ положителен.

704. Найти те значения x, при которых $\arccos\left(\frac{\pi}{2}\arcsin x\right)$ имеет смысл.

705. Решить неравенство $\arcsin \lg x>0$.

706. Решить неравенство $\sin\frac{1}{x^2}>0$.

707. Доказать, что если

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2};\ 0<\beta<\frac{\pi}{2};\ \ 0<\gamma<\frac{\pi}{2} \text{ и } \alpha+\beta+\gamma=\pi,$$

то

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 1.$$

При каком условии будет знак равенства?

708. Дано: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$. Доказать, что сумма $\alpha+\beta+\gamma$ будет острым углом тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha<1.$$

709. Доказать, что если $0<\varphi<\pi$, то

$$1+\operatorname{ctg}\varphi\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

710. Доказать, что если α, β и γ — углы треугольника и угол γ — тупой, то

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta<1.$$

711. Доказать, что если α, β и γ — углы треугольника, то

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant\frac{3}{4}.$$

712. Доказать, что если α, β и γ — углы треугольника, то

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

713. Доказать, что если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x.$$

714. Доказать, что если $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, то

а) $\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta$;

б) $\alpha-\operatorname{tg}\alpha>\beta-\operatorname{tg}\beta$.

715. Доказать, что если $0<\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}.$$

716. Доказать, что если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin x>\frac{2}{\pi}x.$$

717. Доказать, что если $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}.$$

X.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

718. Можно ли сказать, что число $2+5i$ больше числа $1+4i$?

719. Является ли число $-5i$ отрицательным?

720. Найти целое число n, если

$$(1+i)^n=(1-i)^n.$$

721. При каких вещественных x и y справедливо равенство

$$\frac{x+1+(y-3)i}{5+3i}=1+i?$$

722. Найти вещественные x и y из соотношения

$$(x+y)^2i-\frac{6}{i}-x=-y+5i(x+y)-1.$$

723. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x-i=yi; \\ x-i^2=2a-y \end{cases}$$

и значение комплексного параметра a.

724. Решить уравнение $|z|-z=1+2i$.

725. Решить уравнение $|z|+z=2+i$.

726. Доказать тождество

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2),$$

где z_1 и z_2 — комплексные числа.

Представить комплексное число в тригонометрической форме (727—729):

727. $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$, где $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

728. $1+\sin\alpha+i\cos\alpha$, где $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3}{2}\pi$.

729. $1+i\operatorname{tg}\alpha$, где $\pi\leqslant\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

Выяснить, где расположены точки, соответствующие комплексным числам $z=x+iy$, для которых выполняются соотношения (730—732).

730. а) $|z|=2$; б) $1<|z|<2$; в) $Re\,(z^2)^*=0$; г) $\operatorname{Im}(z)\geqslant\frac{1}{2}$; д) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$.

731. а) $\arg z=\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

732. а) $x<0$; б) $y\geqslant 0$.

733. Точка z описывает в плоскости окружность радиуса единица в направлении движения часовой стрелки. Какой путь опишет при этом точка $\bar{z}$? (z и $\bar{z}$ — сопряженные числа).

734. Доказать, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, а аргумент — сумме их аргументов.

735. Доказать, что модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент — разности их аргументов.

736. Доказать формулу Муавра ($n>0$):

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

---

* Обозначения $Re\,(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ и $\arg z$ означают соответственно действительную часть, мнимую часть и аргумент комплексного числа.

737. Доказать формулу Муавра ($n<0$):

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

738. Найти модуль комплексного числа

$$\frac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+i\sqrt{x^4+y^4}}.$$

Вычислить выражения (739—741), положив

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},$$

739. $(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)$.

740. $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$.

741. $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$.

742. Вычислить $z^{142}+\frac{1}{z^{142}}$, если z есть корень уравнения $z+\frac{1}{z}=1$.

743. Выразить $\sin(5\arcsin x)$ через x.

744. Найти суммы:

а) $\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x$;

б) $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x$.

745. Доказать, что если $\cos\alpha+i\sin\alpha$ есть решение уравнения

$$x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n=0$$

и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — вещественные числа, то

$$p_1\sin\alpha+p_2\sin 2\alpha+\ldots+p_n\sin n\alpha=0.$$

746. Найти суммы:

$$S_1=1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots;$$

$$S_2=C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots$$

747. Найти сумму

$$S=C_n^1-3C_n^3+3^2C_n^5-3^3C_n^7+\ldots$$

748. Доказать:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right);$$

$$k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

749. Доказать:

а) $\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\rho+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\right)$; $b>0$;

б) $\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\rho+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\right)$; $b<0$;

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}.$$

750. Вычислить: а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$; в) $\sqrt[5]{1}$.

751. Доказать, что корни уравнения $x^n=1$ могут быть записаны так: $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$.

752. Изобразить геометрически корни уравнения $z^6=i$.

Решить квадратные уравнения (753—754):

753. $x^2+(2i-1)x-7-i=0$.

754. $x^2-(3+i)x+3i=0$.

755. Решить уравнение

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

756. Найти сумму p-х степеней всех корней уравнения $x^n-1=0$ (p — целое, n — натуральное).

757. Решить уравнение

$$(x+i)^n+(x-i)^n=0,$$

n — целое положительное.

758. Рещить уравнение

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha},$$

n — целое положительное.

XI.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

759. Доказать, что в арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ с разностью d любой член

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

760. Доказать, что в геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ со знаменателем q любой член

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

Доказать равенства (761—768):

761. $A_m^n = m(m-1)\dots(m-n+1)$.

762. $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\dots n = n!$

763. $C_m^n = \dfrac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}$.

764. $(a_1+a_2+\dots+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2+ +2(a_1a_2+a_1a_3+\dots+a_{n-1}a_n)$.

765. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

766. $1^4+2^4+\dots+n^4 = \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

767. $1^5+2^5+\dots+n^5 = \dfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$.

768. $\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dots+\dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2^n}-2\operatorname{ctg} 2x$.

769. $\underbrace{\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\dots+\sqrt{4}}}}}_{n \text{ четверок}} < 3$,

770. $(1+a)^n > 1+na$; $a>-1$, $a\neq 0$ и n — натуральное, большее единицы.

771. Доказать, что сторона правильного вписанного в окружность 2^n-угольника выражается формулой

$$a_{n^2} = R\sqrt{2-\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}_{(n-2) \text{ двойки}}}},$$

где R — радиус этой окружности.

772. Доказать, что n прямых, пересекающихся в одной точке и лежащих в одной плоскости, делят эту плоскость на $2n$ частей.

773. Доказать, что сумма всех членов каждой горизонтальной строки таблицы

1
2 3 4
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10
. . . . . .

равна квадрату нечетного числа.

774. Доказать, что n различных прямых, лежащих в одной плоскости, разбивают эту плоскость на области, которые могут

быть закрашены красной и синей красками так, что все смежные области (т. е. области, имеющие общий отрезок прямой) будут закрашены разными красками.

XII.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Найти область определения функций (775—781):

775. а) $y=\sqrt{2-x^2}$; б) $y=\sqrt{x^2-4}$; в) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$;

г) $y=\sqrt{x(x+2)(x-3)(x-4)}$;

д) $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$; е) $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

776. а) $y=\sqrt{2-2^{-x}}$; б) $y=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$; в) $y=x^x$;

г) $y=x^{-\pi}$.

777. а) $y=\log(x^2-1)$; б) $y=\log(x+1)+\log(x-1)$;

в) $y=\log(x^2-3x+2)$; г) $y=\sqrt{\log_3(x-1)}$.

778. а) $y=x\log x$ для $x\neq 0$ и $y=0$ для $x=0$;

б) $y=\frac{1}{2}x\log x^2$ для $x\neq 0$ и $y=0$ для $x=0$.

779. а) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$; б) $y=\sqrt{\sin 4x}$; в) $y=\sin\frac{1}{x^2}$;

г) $y=\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-(\sqrt{3}+1)\operatorname{tg}x+\sqrt{3}}$.

780. а) $y=\sqrt{\log_a \sin x}$; б) $y=\lg\lg\operatorname{tg}x$;

в) $y=\log(1{,}5+\sin x+\cos x)$.

781. а) $y=\arccos\frac{3}{x}$; б) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;

в) $y=\arcsin(\arcsin x)$.

Найти период функций (782—783):

782. а) $y=\sin 3x$; б) $y=\cos\frac{x}{4}$;

в) $y=\operatorname{tg} 3x+2\operatorname{ctg} 2x$; г) $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}$;

д) $y=\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}$;

783. а) $y=\sin 2\pi x$; б) $y=\sin\sqrt{2x}+\cos\sqrt{3x}$.

Исследовать функции и построить их графики (784—812):

784. $y=x^4-2x^2+2$.

785. $y=(x-k)^2$, если $k-1\leqslant x\leqslant k+1$ и $k=0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$

786. $y=|x|$.

787. $y=|x+2|$.

788. $y=|x-1|+|x-2|$.

789. $y=-x|x|$.

790. $y=|x^2-1|$.

791. $y=|x^2-3x+2|$.

792. $y=\frac{1}{1+x^2}$.

793. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

794. $y=\log_2(-x)$.

795. $y=\log_2|x|$.

796. $y=|\log_2 x|$.

797. $y=2\sin 2x$.

798. $y=-\sin\frac{x}{2}$.

799. $y=\sin 4x+\cos 4x$.

800. $y=\sin|x|$.

801. $y=|\sin x|$.

802. $y=x+\sin x$.

803. $y=\operatorname{arc}\sin(\sin x)$.

804. $y=\operatorname{arc}\cos(\cos x)$.

805. $y=\operatorname{arc}\cos(\cos x)$.

806. $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$.

807. $y=\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)$, если x не равно целому числу, и $y=x$, если x равно целому числу.

808. $y=\operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-x}+\operatorname{arc\,sin}\sqrt{x}$.

809. $y=\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$.

810. $y=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$.

811. $y=\operatorname{arc\,cos}\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

812. $y=\operatorname{arc\,cos}(2x^2-1)+2\operatorname{arc\,sin}x$.

813. Как получить график функции $y=|f(x)|$, если график функции $y=f(x)$ известен?

814. Как получить график функции $y=f(|x|)$, если график функции $y=f(x)$ известен?

Выяснить, как расположены точки плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнениям (815—818):

815. $xy=0$.

816. $|x-2|=1$.

817. $x^2=y^2$.

818. $|2y-1|+|2y+1|+\frac{4}{\sqrt{3}}|x|=4$.

Выяснить, как расположены точки плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам (819—828):

819. $x>\frac{1}{2}$.

820. $|x|<3$.

821. $x+y+1>0$.

822. $\begin{cases} y-2x+1<0; \\ y-x-3>0. \end{cases}$

823. $\begin{cases} 2x+y-2>0; \\ x-y<0; \\ 2y-x-2<0. \end{cases}$

824. $|x+y|\leqslant 1$.

825. $|x|+|y|\leqslant 1$.

826. $||x+1|-|y-1||<1$.

827. $y^2-x^2<0$.

828. $\begin{cases} y-x^2>0; \\ y-x<0. \end{cases}$

Определить графически число вещественных корней уравнений (829—833):

829. $\sin x=x$.

830. $2^x=x+2$.

831. $2x^3-6x^2+1=0$.

832. $\operatorname{tg} x=x$.

833. $\sin x=\dfrac{1}{x}$

834. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=10; \\ x+y^2=4. \end{cases}$$

XIII.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

(Планиметрия)

Доказать теоремы (835—869):

835. Треугольник, имеющий две равные высоты,— равнобедренный.

836. Треугольник, имеющий две равные медианы,— равнобедренный.

837. Треугольник, имеющий две равные биссектрисы,— равнобедренный.

838. Если биссектриса угла треугольника является одновременно его медианой, то такой треугольник — равнобедренный.

839. Если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон второго треугольника, то такие треугольники равны.

840. Треугольники с равными периметрами и двумя соответственно равными углами равны.

841. Трапеция с равными диагоналями — равнобедренная.

842. Если в шестиугольнике противоположные стороны равны и параллельны, то три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

843. Сумма расстояний любой точки окружности до двух ближайших к ней вершин вписанного в эту окружность правильного треугольника равна расстоянию взятой точки до третьей вершины треугольника.

844. Прямые, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, биссектрисами которого являются высоты данного.

845. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одинаковым углом при вершине равнобедренный имеет наибольший периметр.

846. Если в шестиугольнике противоположные стороны параллельны, а три диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны между собой, то вокруг такого шестиугольника можно описать окружность.

847. Диаметры окружностей, каждая из которых проходит через точку пересечения высот треугольника и через две его вершины, равны между собой.

848. Прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от треугольника подобный ему треугольник.

849. Треугольники с соответственно параллельными сторонами подобны.

850. Радиусы окружностей, описанных около подобных треугольников, пропорциональны сходственным сторонам.

851. Если из точки C проведены к окружности секущая, имеющая с окружностью точки пересечения A и B, и отрезок CD, где D точка окружности, и если $CA \cdot CB = CD^2$, то прямая CD есть касательная к этой окружности.

852. Если из точки, отстоящей от прямой на расстояние a, проведены к этой прямой две наклонные с проекциями на нее, равными $2a$ и $3a$, то сумма углов этих наклонных со своими проекциями равна 45°.

853. Если в четырехугольнике, две противоположные стороны которого не параллельны, отрезок прямой, соединяющий середины этих сторон, равен полусумме двух других сторон четырехугольника, то этот четырехугольник — трапеция.

854. Длина отрезка прямой, соединяющей середину основания треугольника с серединою отрезка высоты между вершиной и ортоцентром, равна радиусу описанного около треугольника круга.

855. Касательные к окружности, проведенные через вершины прямоугольника, вписанного в эту окружность, образуют ромб.

856. Прямая, проходящая через основания высот треугольника, проведенных из двух его вершин, перпендикулярна прямой, проходящей через его третью вершину и центр описанного вокруг треугольника круга.

857. Биссектрисы углов, образованных продолжениями про-

тивоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника, перпендикулярны между собой.

858. Диаметр вписанного в прямоугольный треугольник круга равен разности между суммою катетов и гипотенузой.

859. Середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагоналей лежат на одной прямой.

860. Если из точки P, взятой вне окружности, проведены к этой окружности касательные PA и PB, где A и B — точки касания, то отрезок перпендикуляра AC, опущенного из точки A на диаметр BD, делится прямою PD пополам. Точка C — основание перпендикуляра, точка D — точка окружности.

861. Расстояние от точки окружности до хорды есть средняя пропорциональная между расстояниями от этой точки до касательных, проведенных к окружности в концах хорды.

862. Центр описанного около треугольника круга, точка пересечения его высот и его центр тяжести лежат на одной прямой.

863. Если прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей, то отрезок, отсекаемый от этой прямой боковыми сторонами трапеции, делится точкой пересечения пополам.

864. Середины диагоналей описанного около окружности четырехугольника и центр этой окружности лежат на одной прямой.

865. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одинаковым углом при вершине равнобедренный имеет наибольшую площадь.

866. Если в равнобедренный треугольник ABC вписан полукруг, диаметр которого лежит на основании AC, и если к полукругу проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке M, а сторону BC в точке N, то произведение $AM \cdot CN$ есть величина постоянная.

867. Если через точки A и B пересечения двух окружностей проведены две секущие MAN и PBQ, пересекающие одну окружность в точках M и P, а другую в точках N и Q, то прямые NP и NQ параллельны.

868. Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.

869. Куб гипотенузы больше суммы кубов катетов.

870. Найти расстояние от центра описанного около треугольника круга до центра вписанного в этот треугольник круга. Радиусы кругов R и r $(R>r)$.

871. Доказать, что радиус вписанного в треугольник круга не больше половины радиуса описанного около треугольника круга.

872. К какой вершине треугольника лежит ближе всего центр вписанной в этот треугольник окружности?

873. Какая медиана наименьшая?

874. Будет ли вписанный равносторонний многоугольник правильным?

875. Будет ли описанный равносторонний многоугольник правильным?

876. Из каких равных правильных многоугольников можно сложить паркет?

877. Вершина B треугольника ABC перемещается так, что длина медианы AD остается неизменной, а сторона AC — неподвижной. Найти геометрическое место точек B.

878. A и B — две заданные неподвижные точки окружности, M — подвижная точка той же окружности. На продолжении отрезка AM в сторону, внешнюю к окружности, откладывается отрезок $MN=MB$. Найти геометрическое место точек N.

879. Найти геометрическое место вершин прямого угла неизменяемого прямоугольного треугольника, если две другие его вершины скользят по сторонам другого прямого угла.

880. Одна окружность касается прямой в точке A. Другая касается той же прямой в точке B и первой окружности в точке M. Найти геометрическое место точек M.

881. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных прямых есть величина постоянная.

882. Из точки вне окружности проведена секущая и в точках пересечения ее с окружностью — касательные. Найти геометрическое место точек пересечения этих касательных.

883. Из точки D, взятой на стороне BC треугольника ABC, проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны AC и AB или их продолжения соответственно в точках E и F. Найти геометрическое место точек пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников CDE и BDF.

884. На сторонах прямого угла отложены от его вершины O отрезки OA и OB, равные между собой. Через точки A и B проведены прямые, параллельные двум данным взаимно перпендикулярным прямым и пересекающиеся в точке M. Какую линию опишет точка M, если прямой угол будет вращаться вокруг своей вершины O?

885. В круг вписан правильный шестиугольник. Пользуясь только линейкой, построить $\frac{1}{n}$ часть радиуса R, где $n=2, 3, 4, 5, \ldots$

886. На данной прямой построить точку, сумма расстояний которой до двух данных точек наименьшая.

887. Даны точки A и B и между ними две параллельные прямые MN и PQ. Провести между последними в данном направлении отрезок CD так, чтобы сумма $AC+CD+DB$ была наименьшая.

888. В данный острый угол вписать треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна его вершина находилась в точке, данной внутри угла, а две другие — на сторонах угла.

889. Через три данные точки провести параллельные прямые так, чтобы расстояния между ними были равны.

890. На продолжении диаметра построить такую точку, чтобы длина касательной, проведенной из нее к окружности, равнялась диаметру.

891. Из вершин треугольника как из центров построить окружности, каждая из которых касалась бы двух других внешним образом.

892. Построить треугольник по данной стороне c, высоте h_b и медиане m_a.

893. Построить треугольник, зная основания трех его высот.

894. Провести секущую к двум концентрическим окружностям так, чтобы хорда большего круга была вдвое больше хорды меньшего круга.

895. На стороне данного угла найти точку, равноудаленную от другой стороны и от данной точки внутри угла.

896. В данный сегмент вписать квадрат так, чтобы одна его сторона лежала на хорде (основании) сегмента.

897. Трапецию пересечь отрезком, параллельным основанию, так, чтобы он разделился диагоналями на три равные части.

898. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

899. Пользуясь только линейкой, разделить трапецию на две равновеликие части.

900. Пользуясь только линейкой, разделить параллелограмм на две части, площади которых относились бы, как 1 : 2.

901. Данный треугольник превратить в равновеликий ему треугольник с данным основанием и общим углом при основании, причем оба основания должны лежать на одной прямой.

902. На данной прямой найти такую точку, чтобы модуль разности расстояний ее от двух данных точек, находящихся по одну сторону от прямой, был наименьшим, а также такую точку, чтобы модуль этой разности был наибольшим.

903. Основания трапеции равны a и b. Найти отрезок прямой, соединяющий середины ее диагоналей.

904. В треугольник, длины сторон которого суть a, b и c, вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она, пересекая две первые стороны, разделяет данный треугольник на две фигуры — треугольник и четырехугольник. Найти периметр полученного треугольника.

905. В треугольник вписан круг так, что две из его сторон делятся точками касания в отношениях $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$. Найти отношения сторон треугольника.

906. На отрезке и двух его неравных частях построены полукруги в одну сторону. По радиусам R и r меньших полукругов определить радиус круга, касательного ко всем трем полукругам.

907. Площадь треугольника ABC равна S. Его стороны AB, BC и CA разделены точками M, N и P так, что $AM:MB=1:4$, $BN:NC=1:4$ и $CP:PA=1:4$. Найти площадь треугольника, ограниченного отрезками прямых AN, BP и CM.

908. В треугольник со сторонами a, b и c вписан круг. Точки касания его со сторонами данного треугольника соединены прямыми и таким образом получился новый треугольник, стороны которого требуется определить.

909. Основания высот остроугольного треугольника со сторонами a, b и c служат вершинами другого треугольника. Найти периметр последнего и показать, что он равен $\frac{8S^2}{abc}$, где S — площадь данного треугольника.

910. Найти радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности, если даны радиус R описанной около этого треугольника окружности и площадь треугольника S.

911. В треугольник со сторонами k, l и m вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что отрезок ее внутри треугольника, заключенный между точками пересечения касательной с первыми двумя сторонами треугольника, равен a. Найти площадь треугольника, отсеченного этой касательной от данного.

912. Прямоугольный треугольник разделен на два треугольника перпендикуляром, опущенным из вершины прямого угла на гипотенузу. В образовавшиеся треугольники вписаны окружности с радиусами r_1 и r_2. Найти радиус круга, вписанного в данный треугольник.

913. Даны две окружности с радиусами R и r. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными и общей внешней касательной окружностей.

914. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найти отрезок ее, ограниченный продолженными диагоналями, если основания трапеции a и b.

915. В трапеции, основания которой a и b, проведена через точку пересечения диагоналей прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, отсекаемого от нее боковыми сторонами трапеции.

916. Прямоугольный сектор радиуса R разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в конце дуги сектора. Найти радиус круга, вписанного в меньшую из этих частей.

917. Два круга радиусов r_1 и r_2 касаются в точке C и к ним

проведена общая внешняя касательная AB, где A и B — точки касания. Найти длины сторон треугольника ABC.

918. Две окружности радиусов r и R касаются снаружи. Найти расстояние от точки касания до их общей внешней касательной.

919. Два круга радиусов R и r внешне касательны. Найти радиус круга, касательного к ним и к их общей внешней касательной.

920. Три окружности радиусов a, b и c касаются попарно снаружи. Найти длину хорды, отсекаемой третьей окружностью от общей внутренней касательной первых двух окружностей.

921. Около данного квадрата со стороною a описан круг, и в один из полученных сегментов вписан квадрат. Определить сторону вписанного квадрата.

922. Два круга радиусов R и r касаются снаружи в точке M. На окружности радиуса r взята точка N, диаметрально противоположная точке M, и в этой точке проведена касательная. Найти радиус круга, касательного к двум данным и к касательной, проходящей через точку N.

923. Дан прямоугольный сектор AOB радиуса R. Параллельно его хорде AB на расстоянии m от нее проведена секущая, пересекающая продолженные радиусы OA и OB в точках C и D, а дугу сектора — в точках E и F. Из точки E, ближайшей к C, восставлен к CD перпендикуляр EM, пересекающий OA в точке M. Показать, что длина отрезка DM не зависит от m, и найти длину этого отрезка.

924. По данным двум сторонам a и b треугольника найти третью сторону, если известно, что медианы, проведенные к данным сторонам, пересекаются под прямым углом.

925. Найти радиус круга, зная длины a и b двух его хорд, исходящих из одной точки окружности, и расстояние d от середины первой из данных хорд до второй.

926. Через центры двух равных касающихся окружностей радиуса r проведена окружность радиуса $2r$. Из некоторой точки, находящейся на последней окружности, описана окружность, касательная к первым двум. Найти ее радиус.

927. Дан прямоугольный треугольник ABC, где A — прямой угол. Из A опущен перпендикуляр AK на гипотенузу, а из K — перпендикуляры KP и KT на катеты AB и AC. Зная, что $BP=m$ и $CT=n$, найти длину гипотенузы.

928. Площадь треугольника ABC равна S_1; площадь треугольника AHB, где H — точка пересечения высот, равна S_2. Найти площадь прямоугольного треугольника ABL, предполагая, что точка L лежит на отрезке CH или его продолжении.

929. Две стороны остроугольного треугольника — 20 *см* и 23,2 *см*. Радиус описанного около треугольника круга равен 14,5 *см*. Найти радиус вписанного в треугольник круга.

930. Катеты треугольника — 3 и 4. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведен круг, касательный к гипотенузе. Найти площадь этого круга.

931. Две равные окружности радиуса r пересекаются. В общую часть обоих кругов вписан квадрат.

Найти сторону этого квадрата, если расстояние между центрами окружностей равно r.

932. На двух смежных сторонах квадрата построены во внешнем поле два полукруга и к ним касательные, параллельные своим диаметрам. Найти радиус круга, касательного к этим двум полукругам и к упомянутым касательным, если сторона квадрата равна $2a$.

933. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что касательная к ней, проведенная из третьей вершины, равна двойной стороне квадрата. Найти радиус этой окружности, если площадь квадрата равна 10.

934. Окружность касается большего катета треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе. Найти ее радиус, если катеты равны 3 и 4.

935. Центр окружности радиуса 3 лежит на другой окружности радиуса 5. Из центра O последней проведен диаметр, касательный к первой, и в точку касания — радиус, пересекающийся с общей хордой в точке K. Найти длину отрезка OK.

936. Каждые две противоположные вершины квадрата со стороною a служат вершинами двух равных ромбов. Найти площадь, общую обоим ромбам, если площадь каждого из них равна половине площади квадрата.

937. Прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b разделен на две равновеликие части AMN и $BCMN$ прямой MN, перпендикулярной к гипотенузе AB. Найти площадь круга, описанного вокруг четырехугольника $BCMN$.

938. К двум извне касающимся окружностям радиусов R и r проведены две общие касательные. Найти площадь трапеции, образованной этими двумя касательными и хордами, соединяющими точки касания.

939. В некоторый угол вписана окружность радиуса r, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна a. Параллельно этой хорде проведены две касательные, и таким образом получилась трапеция, площадь которой требуется найти.

940. В треугольник со сторонами a, b и c вписан полукруг с диаметром, лежащим на стороне c. Найти величину этого диаметра.

941. Найти площадь треугольника, если отрезки, образуемые на одной из его сторон точкой касания вписанной окружности, суть m и n, а противолежащий ей угол треугольника равен 60°.

942. Меньшее основание трапеции $DC=b$; большее основание $AB=a$. На продолжении меньшего основания найти точку M

при условии, чтобы прямая AM разделила трапецию на две равновеликие части.

943. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении она делит боковые стороны треугольника?

944. Найти длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и делящей трапецию на две равновеликие фигуры, заключенного между боковыми сторонами трапеции. Длины оснований трапеции равны a и b.

945. Прямая, параллельная основаниям трапеции, разделяет ее на две части, площади которых относятся между собой, как 7:2 (считая от большего основания). Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 5 и 3.

946. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны S_1 и S_2. Найти площадь трапеции.

947. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разделяют площадь треугольника на шесть частей, из которых три — треугольники с площадями S_1, S_2 и S_3. Найти площадь данного треугольника.

948. Прямая, параллельная основанию треугольника с площадью S, отсекает от него треугольник с площадью S_1. Определить площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами маленького треугольника, а четвертая лежит на основании большого треугольника.

949. К двум, извне касающимся в точке A окружностям, радиусы которых 3 и 1, проведена общая внешняя касательная BC. Найти площадь фигуры ABC, ограниченную окружностями и касательной.

950. По высотам h_1, h_2, h_3 треугольника определить его площадь S.

951. По медианам m_1, m_2, m_3 треугольника определить его площадь S.

952. Площадь четырехугольника равна S. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.

953. В равнобедренной трапеции средняя линия равна d, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

954. В угол вписаны два внешнекасательных круга. Хорды, соединяющие точки касания каждого круга со сторонами угла, равны соответственно $2a$ и $2b$. Определить угол.

955. В равнобедренный треугольник вписаны один над другим два круга радиусов R и r, касающиеся друг друга. Найти углы при основании треугольника.

956. Точка D внутри круга радиуса R удалена от центра на расстояние a. Через D проведены диаметр и две взаимно перпендикулярные хорды, одна из которых образует угол α с диаметром. Определить площадь вписанного в круг четырехугольника, имеющего эти хорды диагоналями.

957. Окружности радиусов r и R касаются прямой AD в точке A и расположены по одну сторону от AD. Прямая, параллельная AD, пересекает окружности в точках B и C, находящихся по одну сторону от линии центров. Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

958. Из вершин квадрата, сторона которого a, как из центров, проведены окружности радиусов a. Найти площадь, общую всем четырем построенным кругам.

959. Прямая касается окружности в точке A. Параллельно этой прямой проведена другая прямая, пересекающая окружность в точках B и C, которые соединены с точкой A. Рассматривая площадь треугольника ABC как функцию расстояния между прямыми, написать формулу, связывающую функцию и аргумент. Радиус окружности равен R.

960. Из всех прямоугольников с площадью S найти прямоугольник с наименьшим периметром.

961. Треугольник ABC с площадью S и углом α при вершине A разделен на две равновеликие фигуры AMN и $CMNB$ прямой MN, где M и N — точки на сторонах AC и AB. Найти периметр фигуры AMN при условии, что длина MN — наименьшая.

962. Три положительных числа a, b и c связаны зависимостью

$$a^2=b^2+c^2.$$

На основании каких теорем можно утверждать, что эти числа могут быть приняты за длины сторон треугольника и что этот треугольник прямоугольный?

XIV.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ

(Стереометрия)

Доказать теоремы (963—971):

963. В правильном тетраэдре сумма расстояний от любой внутренней точки до его четырех граней есть величина постоянная.

964. Если имеется конечное число таких прямых, что каждые две из них пересекаются, то все они или проходят через одну точку, или лежат в одной плоскости.

965. Любой выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограмм.

966. Куб можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится правильный шестиугольник.

967. Если через три вершины параллелепипеда, являющиеся вторыми концами ребер, исходящих из одной вершины, проведена плоскость, то треугольник, получающийся в пересечении параллелепипеда этой плоскостью, пересекается диагональю параллелепипеда, исходящей из той же вершины, в центре тяжести.

968. Если все двугранные углы трехгранного угла острые, то и все плоские углы трехгранного угла тоже острые.

969. Если любое сечение поверхности плоскостью есть окружность, то эта поверхность — шаровая.

970. Не существует многогранника с нечетным числом граней, все грани которого являются многоугольниками с нечетным числом сторон.

971. Любой плоский угол четырехгранного угла меньше суммы трех других плоских углов.

972. Найти геометрическое место проекций данной точки на всевозможные плоскости, проходящие через другую данную точку.

973. Найти геометрическое место центров сечений данной шаровой поверхности плоскостями, проходящими через данную прямую.

974. Доказать, что через любую прямую можно провести плоскость, параллельную любой другой прямой, если только эти прямые не пересекаются.

975. Построить общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.

976. Построить прямую, параллельную данной прямой и пересекающую две другие данные прямые.

977. Построить отрезок данной длины, параллельный данной плоскости, так, чтобы концы его находились на двух данных прямых.

978. Взяты такие четыре вершины куба, что никакие две из них не лежат на одном ребре. Через каждые три из этих четырех вершин проведена плоскость. Найти объем тела, ограниченного проведенными плоскостями. Ребро куба равно a.

979. Через каждые три вершины куба с ребром a, лежащие в концах каждых трех ребер, сходящихся в одной вершине, проведена плоскость. Найти объем тела, ограниченного этими плоскостями.

980. От правильной четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания, отсечена пирамида с полной поверхностью S. Найти полную поверхность призмы, если угол при вершине треугольника, получившегося в сечении, равен α.

981. Плоские углы при вершине параллелепипеда равны между собой и равны 45°. Длины ребер, сходящихся в одной вершине, равны a, b и c. Найти объем параллелепипеда.

982. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, суть a, b и c. Первые два ребра взаимно перпендикулярны, а третье образует с каждым из них угол α. Найти объем параллелепипеда.

983. Острые углы α, β и γ являются плоскими углами трехгранного угла. Найти его двугранные углы.

984. Найти объем параллелепипеда, если длины трех его ребер, сходящихся в одной вершине, равны l, m и n, а плоские углы при той же вершине — α, β и γ, причем все острые.

985. Через середину высоты правильной треугольной пирамиды, параллельно ее боковой грани, проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения, если площадь боковой грани пирамиды равна S.

986. Через центр основания правильной треугольной пирамиды, параллельно двум непересекающимся ребрам ее, проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения, если боковое ребро пирамиды равно l, а ребро основания a.

987. Боковые грани пирамиды, основанием которой служит равнобедренная трапеция с высотой h, одинаково наклонены к плоскости основания. Из вершины пирамиды опущены перпендикуляры на боковые стороны трапеции, и основания их соединены. В полученном треугольном сечении угол при вершине равен α, а площадь сечения равна S. Найти объем пирамиды.

988. Основанием четырехугольной пирамиды служит трапеция с основаниями a и b $(a>b)$ и высотой h. Боковая грань, проходящая через меньшее основание трапеции, перпендикулярна к плоскости основания, а противоположная грань является равнобедренным треугольником с углом при вершине пирамиды, равным α. Через вершину пирамиды и точку пересечения диагоналей трапеции проведена плоскость, параллельная основаниям трапеции. Найти площадь образовавшегося в этой плоскости треугольника.

989. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Определить площадь образовавшегося треугольного сечения, если объем пирамиды, отсеченной плоскостью от призмы, равен V.

990. Гранями треугольной пирамиды являются равные равнобедренные треугольники. Основание и противолежащий ему угол каждого такого треугольника — a и α. Найти объем пирамиды.

991. Основанием прямой призмы служит ромб $KBCD$ со стороною a и углом 60°. Концы B_1 и D_1 диагонали верхнего основания призмы соединены прямыми B_1E и D_1F с серединами сторон

KD и KB нижнего. В пересечении этих прямых образуется угол B_1OD_1, равный α. Определить объем призмы.

992. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник, периметр которого равен $2p$, а каждый из двух равных углов равен α. Через основание этого треугольника и конец противоположного ребра призмы проведено сечение. Угол при основании этого треугольного сечения равен β. Найти объем призмы.

993. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды по данному ее объему V и углу α между боковой гранью и плоскостью основания.

994. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Длина каждого бокового ребра равна m. Плоские углы трехгранных углов при основании пирамиды суть α, β и $90°$. Найти объем пирамиды.

995. В правильной четырехугольной пирамиде, у которой сторона основания равна a и двугранный угол при основании равен α, через одну из сторон основания проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Определить площадь сечения.

996. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Найти объем пирамиды.

997. В правильной n-угольной пирамиде сторона основания равна $2a$, двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Определить объем пирамиды.

998. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна к одной из боковых граней. Указать, к какой именно.

999. Основанием пирамиды служит трапеция, боковые стороны и меньшее основание которой равны a, а острый угол α. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

1000. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный h, и перпендикуляр на боковую грань, равный a. Найти объем пирамиды.

1001. Через одно из ребер основания правильной треугольной пирамиды со стороной основания q проведена плоскость перпендикулярно противолежащему боковому ребру и делящая это ребро в отношении $m:n$. Определить полную поверхность пирамиды.

1002. Вычислить объем правильной пирамиды высоты h, зная, что в основании ее лежит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна $90°n$, а отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k.

1003. Правильная пятиугольная пирамида $SABCDE$ пересечена плоскостью, проходящей через вершины A и C основания и середины ребер SD и SE. Найти площадь сечения, если ребро основания пирамиды равно q, а боковое ребро равно b.

1004. Через вершину правильной n-угольной пирамиды и через две вершины многоугольника, лежащего в основании, под углом α к плоскости основания проведена плоскость, рассекающая основание на два многоугольника, имеющие соответственно $(r+2)$ вершины и $(n-r)$ вершин $\left(r<\frac{n-2}{2}\right)$. Найти объем пирамиды, если общая сторона этих двух многоугольников равна b.

1005. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды равны между собой и равны b. Угол между равными сторонами треугольника, лежащего в основании, равен α. Найти объем пирамиды.

1006. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC, в котором AB и AC образуют между собой угол α и $AB=AC=a$. Грань SBC перпендикулярна к плоскости основания, а грани SBA и SCA образуют с плоскостью основания углы φ. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

1007. Две правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту; вершина каждой пирамиды лежит в центре основания другой; боковые ребра одной пересекают боковые ребра другой. Боковое ребро l первой пирамиды образует с высотой угол α, боковое ребро второй образует с высотой угол β. Определить объем общей части этих пирамид.

1008. Правильный октаэдр пересечен плоскостью так, что в сечении получился правильный шестиугольник. Все вершины этого шестиугольника соединены с одной из вершин данного октаэдра. Найти объем образовавшегося тела, если объем октаэдра равен V.

1009. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде проведена плоскость через две противоположные вершины параллельно диагонали основания. Определить площадь сечения, если высота пирамиды h, а стороны оснований a и b.

1010. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Определить объем шара, вписанного в эту пирамиду.

1011. Две равные правильные четырехугольные пирамиды приложены одна к другой основаниями так, что оба основания совпадают, а вершины расположены по разные стороны от общего основания. В образованный таким образом восьмигранник вписан шар. Определить его радиус, если сторона основания каждой из пирамид равна a, а плоский угол при вершине равен α.

1012. Шаровая поверхность касается трех ребер куба, сходя-

щихся в одной вершине, и трех его граней, пересекающихся в вершине, противоположной предыдущей. Найти часть поверхности этой сферы, лежащей вне куба, если ребро куба равно a.

1013. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, имеет длину h и составляет с одним из катетов угол α. Определить объем призмы.

1014. Ребро правильного тетраэдра равно a. Определить радиус шара, поверхность которого касается всех ребер тетраэдра.

1015. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α, а радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен R. Найти полную поверхность пирамиды.

1016. В прямой круговой конус объема V вписана треугольная пирамида с плоскими углами при вершине, равными α, β и γ. Найти объем этой пирамиды.

1017. В шаре из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом 2α друг к другу. Определить их длины, если радиус шара равен R.

1018. В правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а плоский угол при вершине равен α, вписан полушар с плоскостью экватора, расположенной в основании пирамиды. Найти объем многогранника, четыре вершины которого находятся в точках касания шаровой поверхности с боковыми гранями пирамиды, а пятая — в центре полушара.

1019. Стороны равнобедренной трапеции касаются кругового цилиндра, ось которого перпендикулярна параллельным сторонам трапеции. Найти угол, который образует ось цилиндра с плоскостью трапеции, если основания трапеции суть a и b, а ее высота равна h.

1020. Осевое сечение конуса — две взаимно перпендикулярные прямые. На одной и той же образующей конуса взяты точки A и B на расстоянии a друг от друга. На поверхности конуса взяты еще две точки C и D такие, что $ABCD$ — правильный тетраэдр. Найти расстояние от вершины конуса до ребра CD этого тетраэдра.

1021. Найти объем цилиндра, расположенного внутри правильного тетраэдра так, что высота тетраэдра служит осью цилиндра, окружность одного основания цилиндра лежит в плоскости основания тетраэдра, а окружность другого касается остальных граней тетраэдра и пересекает две другие его высоты. Ребро тетраэдра равно l.

1022. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом φ к его высоте. Найти площадь полученного сечения.

1023. Два конуса имеют общую высоту, но вершины их лежат в разных концах высоты. Образующая первого конуса равна l, а угол при вершине его осевого сечения равен 2α. Угол при вершине в осевом сечении второго конуса равен 2β. Найти объем общей части конусов.

1024. В трапеции одна из боковых сторон равна b и образует с большим основанием, равным $2a$, угол α. Меньшее основание равно a. Определить объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг данной боковой стороны.

1025. Угол образующей a конуса с плоскостью его основания равен α. Найти объем описанной около конуса пирамиды, основанием которой служит ромб с острым углом β.

1026. Около конуса описана треугольная пирамида, причем линиями касания боковая поверхность конуса делится на три части, относящиеся между собой, как 5:6:7. Найти отношение между частями боковой поверхности пирамиды, ограниченными линиями касания.

1027. На плоскости лежат три равных конуса с общей вершиной. Каждый из них касается двух, рядом лежащих. Найти угол при вершине осевого сечения одного из этих конусов.

1028. На высоте конуса, как на диаметре, описан шар. Найти объем части шара, заключенной внутри конуса, если даны высота h конуса и угол при вершине его осевого сечения, равный 2α.

1029. Конус с углом α между осью и образующей и радиусом основания r рассечен сферической поверхностью, центр которой находится в вершине конуса, так что объем конуса разделен пополам. Найти радиус этой сферы.

1030. В правильную n-угольную пирамиду с ребром основания q и боковым ребром a вписан шар. Найти его радиус.

1031. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h. Перпендикуляр, опущенный из центра шара, описанного около пирамиды, на ее боковую грань, образует с высотой угол α. Найти объем шара.

1032. Прямой круговой конус рассечен на две части, равные по объему, плоскостью, проходящей через центр вписанного шара перпендикулярно оси. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

1033. В прямой круговой конус, угол при вершине осевого сечения которого равен α, вписан шар радиуса r и затем проведена плоскость, заключающая окружность касания поверхности конуса с поверхностью шара. Найти объем получившегося усеченного конуса.

1034. Основанием пирамиды служит прямоугольник, диагонали которого образуют между собой угол α, а боковые ребра ее составляют с плоскостью основания угол φ. Найти объем пирамиды, если известно, что радиус описанного около нее шара равен R.

1035. В конус вписан шар радиуса r. Найти объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстояние d.

1036. В шар радиуса R вписан цилиндр. Рассматривая объем цилиндра как функцию радиуса основания цилиндра, написать формулу, связывающую функцию и аргумент.

1037. Можно ли определить призму как многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы?

РЕШЕНИЯ

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ *

1. $A=c(b^2+bc+ac-a^2)-ab(a+b)=c(b^2-a^2)+c^2(b+a)-$
$-ab(a+b)=(a+b)(bc-ac+c^2-ab)=(a+b)[(bc-ab)+$
$+(c^2-ac)]=(a+b)[b(c-a)+c(c-a)]=(a+b)(b+c)(c-a).$

2. $A=b^2(a^2b-a^3+c^3-c^2b)+c^2a^2(a-c)=b^2[(a^2b-c^2b)-$
$-(a^3-c^3)]+a^2c^2(a-c)=b^3(a^2-c^2)-b^2(a^3-c^3)+a^2c^2(a-c)=$
$=(a-c)(b^3a+b^3c-b^2a^2-b^2ac-b^2c^2+a^2c^2)=(a-c)[b^2a(b-c)+$
$+b^2c(b-c)-a^2(b^2-c^2)]=(a-c)(b-c)(b^2a+b^2c-a^2b-a^2c)=$
$=(a-c)(b-c)[ab(b-a)+c(b^2-a^2)]=$
$=(a-c)(b-c)(b-a)(ab+bc+ca).$

3. Выражение, стоящее в первых квадратных скобках, легко приводится к следующему:

$$(ax+by)^2+(ay+bx)^2,$$

а второе — к такому:

$$4(ay+bx)^2(ax+by)^2.$$

Имея это в виду и воспользовавшись формулой разности квадратов двух количеств для данного выражения A, получаем

$$A=[(ax+by)^2+(ay+bx)^2]^2-4(ay+bx)^2(ax+by)^2=$$
$$=[(ax+by)^2+(ay+bx)^2-2(ay+bx)(ax+by)][(ax+by)^2+$$
$$+(ay+bx)^2+2(ay+bx)(ax+by)]=[(ax+by)-(ay+bx)]^2\times$$
$$\times[(ax+by)+(ay+bx)]^2=[(a-b)(x-y)]^2[(a+b)(x+y)]^2=$$
$$=(a-b)^2(a+b)^2(x-y)^2(x+y)^2.$$

4. $A=2a^2b+4ab^2-a^2c-2abc+ac^2+2bc^2-4b^2c-2abc=$
$=2ab(a+2b)-ac(a+2b)+c^2(a+2b)-2bc(a+2b)=$
$=(a+2b)(2ab-ac+c^2-2bc)=(a+2b)[a(2b-c)-c(2b-c)]=$
$=(a+2b)(2b-c)(a-c).$

5. $A=y(x-2z)^2+8xyz+xy^2-4xyz+4xz^2-2zx^2-4zxy-2zy^2=$

* Здесь выражение, подлежащее упрощению, обычно не повторяется, а обозначается буквой A.

$$=y(x-2z)^2+(xy^2-2zy^2)-(2zx^2-4xz^2)=(x-2z)(yx-2yz+$$
$$+y^2-2xz)=(x-2z)[x(y-2z)+y(y-2z)]=$$
$$=(x-2z)(y-2z)(x+y).$$

6. $A=8x^3(y+z)-y^3z-2y^3x-2xz^3+z^3y=8x^3(y+z)-$
$$-yz(y^2-z^2)-2x(y^3+z^3)=(y+z)[8x^3-yz(y-z)-2x(y^2-yz+$$
$$+z^2)]=(y+z)(8x^3-y^2z+yz^2-2xy^2+2xyz-2xz^2)=(y+z)\times$$
$$\times[(8x^3-2xy^2)+(2xyz-y^2z)-(2xz^2-yz^2)]=(y+z)[2x(4x^2-$$
$$-y^2)+yz(2x-y)-z^2(2x-y)]=(y+z)(2x-y)(4x^2+2xy+yz-$$
$$-z^2)=(y+z)(2x-y)[(4x^2-z^2)+(2xy+yz)]=$$
$$=(y+z)(2x-y)[(2x+z)(2x-z)+y(2x+z)]=$$
$$=(y+z)(2x-y)(2x+z)(2x-z+y).$$

7. $A=(x^4+y^4-2x^2y^2)-2(x^2-y^2)z^2+z^4-4y^2z^2=(x^2-y^2)^2-$
$$-2(x^2-y^2)z^2+z^4-4y^2z^2=[(x^2-y^2)-z^2]^2-(2yz)^2=(x^2-y^2-$$
$$-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)=[x^2-(y+z)^2][x^2-(y-z)^2]=$$
$$=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z).$$

8. $A=(x^2y+xy^2)+(xz^2+yz^2)+(x^2z+y^2z+2xyz)=xy(x+y)+$
$$+z^2(x+y)+z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2+zx+zy)=$$
$$=(x+y)[x(y+z)+z(y+z)]=(x+y)(y+z)(z+x).$$

Замечание. Исходное выражение симметрично относительно букв x, y, z, т. е. такое, что от замены x, y, z соответственно буквами y, z, x не меняет своего вида. Следовательно, если оно имеет множитель $x+y$, то оно имеет также множители $y+z$ и $z+x$. Таким образом, после выделения множителя $x+y$ можно было предвидеть наличие множителей $y+z$ и $z+x$ в окончательном результате.

9. $A=(x^2y+xy^2+xyz)+(x^2z+xz^2+xyz)+(y^2z+yz^2+xyz)=$
$$=xy(x+y+z)+xz(x+y+z)+yz(x+y+z)=$$
$$=(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

10. $A=(x^3-1)+(5x^2-5)+(3x-3)=(x-1)(x^2+x+1)+$
$$+5(x-1)(x+1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+x+1+5x+5+3)=$$
$$=(x-1)(x^2+6x+9)=(x-1)(x+3)^2.$$

11. $A=(x^3-1)+(9x^2-9)+(11x-11)=(x-1)(x^2+x+1+$
$$+9x+9+11)=(x-1)(x^2+10x+21)=(x-1)(x+3)(x+7).$$

12. $A=x[x^2(x^2-7)^2-36]=x[x(x^2-7)-6][x(x^2-7)+6]=$
$$=x(x^3-7x-6)(x^3-7x+6)=x[(x^3+1)-7(x+1)][(x^3-1)-$$
$$-7(x-1)]=x(x+1)(x-1)(x^2-x-6)(x^2+x-6)=$$
$$=x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2).$$

13. Воспользуемся формулой $(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$ для преобразования первого слагаемого данного выражения. Получим

$$A=[(b-a)+(a-c)]^3+(c-a)^3+(a-b)^3=(b-a)^3+$$
$$+3(b-a)(a-c)[(b-a)+(a-c)]+(a-c)^3-(a-c)^3-$$
$$-(b-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

14. $A=3(y^2+z^2)(x^2+y^2)(x-z)(x+z)$.

Указание. Решать так же, как задачу 13.

15. $A=[(x+y+z)^3-x^3]-(y^3+z^3)=[(x+y+z)-x][(x+y+z)^2+(x+y+z)x+x^2]-(y+z)(y^2-yz+z^2)=$
$=(y+z)[(x+y+z)^2+(x+y+z)x+x^2-y^2+yz-z^2]$.

Вместо того чтобы производить утомительные выкладки для выделения других множителей способом группировки, воспользуемся замечанием к задаче 8. Так как данное выражение симметрично относительно x, y, z, то наряду с множителем $y+z$ оно имеет множители $z+x$ и $x+y$. Поэтому можно написать

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=(x+y)(y+z)(z+x)B,$$

где B — частное от деления данного выражения на произведение трех выделенных множителей. Рассматривая левую и правую части последнего равенства как многочлены относительно x и замечая, что в равных многочленах коэффициенты при одинаковых степенях буквы x равны, найдем сравнением коэффициентов при x^2, что $B=3$. Следовательно,

$$A=3(x+y)(y+z)(z+x).$$

16. Пусть n — любое целое число. Тогда получим

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=$$
$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2.$$

17. $13^{2n}-1=169^n-1=168(169^{n-1}+169^{n-2}+\ldots+1)$.

18. $7^{21}-487=7\cdot 49^{10}-7-480=7\cdot(49^{10}-1)-480=$
$=7\cdot 48(49^9+49^8+\ldots+1)-48\cdot 10=48[7(49^9+49^8+\ldots+1)-10]$.

Так как $49=8\cdot 6+1$, то $49^k=6m+1$ и выражение в квадратных скобках будет иметь вид

$$7(6n+10)-10=7\cdot 6n+60=6(7n+10).$$

Итак,

$$7^{21}-487=48\cdot 6(7n+10)=288(7n+10),$$

т. е. делится на 288.

19. Обозначим буквой A левую часть данного равенства. Получим

$$A=(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2=[(a-c)+(b-c)]^2+[(b-a)+(c-a)]^2+[(c-b)+(a-b)]^2=2(a-c)^2+2(b-c)^2+2(b-a)^2+2(a-c)(b-c)+2(b-a)(c-a)+2(c-b)(a-b)=2A+[(a-c)(b-c)+(b-a)(c-a)]+[(a-c)(b-c)+(c-b)(a-b)]+[(b-a)(c-a)+(c-b)(a-b)]=2A+(a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2=2A+A=3A.$$

Итак, $A=3A$, $2A=0$, $A=0$, т. е. $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$. Отсюда $a=b=c$.

20. Так как из равенства $m+n+p=0$ следует, что $m=-n-p$, то

$$m^3+n^3+p^3=(-n-p)^3+n^3+p^3=-n^3-3np(n+p)-p^3+n^3+p^3=$$
$$=-3np(n+p)=3mnp$$

(см. также задачу 23).

21.
$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}(y^2+2yz+z^2)x^2+2(y+z)x+1\\ (y^2+2yz+z^2)x^2+\ (y+z)x\end{array} & \dfrac{(y+z)x+1}{(y+z)x+1} \\ \hline -\begin{array}{r}(y+z)x+1\\ (y+z)x+1\end{array} & \\ \hline 0 & \end{array}.$$

22. Расположив делимое и делитель по убывающим степеням буквы x и пользуясь известным правилом деления многочлена на многочлен, получим

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}(a^3-1)x^3-(a^3+a^2-2)x^2+(4a^2+3a+2)x-3a-3\\ (a^3-1)x^3-(a^3-1)x^2+3(a^2+a+1)x\end{array} & \dfrac{(a-1)x^2-(a-1)x+3}{(a^2+a+1)x-(a+1)} \\ \hline -\begin{array}{r}-(a^2-1)x^2+(a^2-1)x-3(a+1)\\ -(a^2-1)x^2+(a^2-1)x-3(a+1)\end{array} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

23. Подставим в данное выражение вместо x величину $-y-z$. Получим $(-y-z)^3+y^3+z^3-3(-y-z)yz=-(y+z)^3+y^3+z^3+3y^2z+3yz^2=-(y+z)^3+(y+z)^3=0$. Отсюда, на основании теоремы Безу, заключаем, что многочлен $x^3+y^3+z^3-3xyz$ делится на $x-(-y-z)=x+y+z$.

24. Среди трех последовательных натуральных чисел одно непременно кратно 3 и одно или два четные. Тот из двучленов x^k-1 $(k=m+1,\ m-1,\ m)$, у которого k — четное, разделится на x^2-1; у которого k кратно трем, разделится на x^3-1 и последний при любом натуральном k разделится на $x-1$.

25. Представив данные выражения в виде $\dfrac{a^m-1}{a-1}$ и $\dfrac{a^n-1}{a-1}$, видим, что вопрос сводится к выяснению признака делимости выражений a^m-1 и a^n-1. Очевидно, для этого необходимо, чтобы было $m\geqslant n$. Пусть частное и остаток от деления m на n будут p и q, т. е. $m=np+q$. Получим

$$\frac{a^m-1}{a^n-1}=\frac{a^{np+q}-1}{a^n-1}=\frac{a^{np}a^q-a^q+a^q-1}{a^n-1}=$$
$$=a^q\cdot\frac{(a^n)^p-1}{a^n-1}+\frac{a^q-1}{a^n-1}.$$

Отсюда видно, что для возможности деления нацело необходимо и достаточно, чтобы $q=0$, т. е. чтобы m было кратно n.

26. Корни x_1 и x_2 трехчлена x^2+x+1 удовлетворяют условиям $x_i^2+x_i+1=0$ и $x_i^3=1$ $(i=1,2)$. Поэтому $x_i^{3k}+x^{32}+x^{28}=(x_i^3)^k+(x_i^3)^{10}x_i^2+(x_i^3)^9x_i=1+x_i^2+x_i=0$. Отсюда, по теореме Безу, данный многочлен делится на $x-x_1$ и $x-x_2$, а следовательно, и на их произведение $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+x+1$.

27. Умножим и разделим левую часть доказываемого равенства на $1-x$. Получим

$$\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2n-1})}{1-x}=\frac{1-x^{2n}}{1-x}=$$
$$=1+x+x^2+\ldots+x^{2n-1}.$$

28. Произведение трех данных множителей приводится к многочлену степени $2\cdot175+1\cdot5+3\cdot149=802$. Поэтому можно написать

$$(1+4x-4x^2)^{175}(1+2x)^5(1-3x+x^2+2x^3)^{149}=$$
$$=A_1x^{802}+A_2x^{801}+\ldots+A_{803}.$$

Полагая в этом равенстве $x=1$, получим

$$A_1+A_2+\ldots+A_{803}=1^{175}\cdot3^5\cdot1^{149}=243.$$

29. Это равенство можно доказать путем упрощения левой части. Но такой путь приведет к большим выкладкам. Можно доказать короче. Известно, что если два многочлена $f(x)$ и $\varphi(x)$ степени n имеют одинаковые значения при $n+1$ различных значениях x, то они тождественно равны. В данном случае $n=2$. Полагая в левой и правой частях доказываемого равенства $x=a$; $x=b$; $x=c$, получим для обеих частей соответственно a^2, b^2, c^2. Тем самым тождество доказано.

30. I. Необходимость. Пусть $\frac{ax+b}{mx+n}=k$, где k — не зависит от x. Освободившись от знаменателя, получим равенство $ax+b=kmx+kn$. Но из равенства многочленов следует равенство их коэффициентов при одинаковых степенях x. Поэтому можно написать, что $a=km$ и $b=kn$ или $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$. Если $m=0$ (или $n=0$), то пропорцию следует написать иначе: $\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$ $\left(\text{или } \frac{n}{m}=\frac{b}{a}\right)$. Случай $m=n=0$ исключается.

II. Достаточность. Пусть $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=k$. Тогда

$$a=mk;\ b=nk;\ \frac{ax+b}{mx+n}=\frac{mkx+nk}{mx+n}=k\cdot\frac{mx+n}{mx+n}=k.$$

31. Поступая так же, как и в задаче 30, найдем, что искомые необходимые и достаточные условия состоят в следующем:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}.$$

32. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1-x^2}$,

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1-x^4}.$$

Прибавляя к полученному результату четвертую данную дробь, а затем пятую и шестую, получим окончательно

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}}.$$

33. Приведя дроби к общему знаменателю, получим

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)(a-c)}[(b-c)+(c-a)+(a-b)]=0.$$

34. После приведения дробей к общему знаменателю, получим

$$\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{N},$$

где

$$N=(a-b)(b-c)(a-c).$$

Разлагаем числитель на множители:

$$\begin{gathered}a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)+(b^2c-c^2b)+\\+(c^2a-b^2a)=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)=\\=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)=(b-c)[(a^2-ab)+(bc-ac)]=\\=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]=(a-b)(b-c)(a-c)=N.\end{gathered}$$

Ответ: $\frac{N}{N}=1.$

35. Складываем данные дроби попарно — первые две и вторые две. Получим

$$\begin{gathered}A=\frac{(a-b)(b+c)+(b-c)(a+b)}{(a+b)(b+c)}+\\+\frac{(c-a)[(a+b)(b+c)+(a-b)(b-c)]}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\\=\frac{ab-b^2+ac-bc+ab-ac+b^2-bc}{(a+b)(b+c)}+\\+\frac{(c-a)(ab+b^2+ac+bc+ab-b^2-ac+bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\\=\frac{2ab-2bc}{(a+b)(b+c)}+\frac{(c-a)(2ab+2bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}+\\+\frac{2b(a+c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}-\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}=0.\end{gathered}$$

36. Приведя дроби к общему знаменателю, получим, что данное выражение

$$A=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[(a^2-b^2)+(b^2-c^2)+(c^2-a^2)]=0.$$

37. $$A=\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{c^2(y^2-b^2)(z^2-b^2)-b^2(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{b^2c^2(b^2-c^2)}=$$

$$=\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{c^2y^2z^2-c^2b^2z^2-c^2y^2b^2+c^2b^4-b^2y^2z^2+b^2c^2z^2+b^2y^2c^2-b^2c^4}{b^2c^2(b^2-c^2)}=$$

$$=\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{c^2y^2z^2-b^2y^2z^2+c^2b^4-b^2c^4}{b^2c^2(b^2-c^2)}=\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+$$

$$+\frac{y^2z^2(c^2-b^2)+c^2b^2(b^2-c^2)}{b^2c^2(b^2-c^2)}=\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(b^2-c^2)(-y^2z^2+b^2c^2)}{b^2c^2(b^2-c^2)}=$$

$$=\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{-y^2z^2+b^2c^2}{b^2c^2}=\frac{y^2z^2}{b^2c^2}-\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{b^2c^2}{b^2c^2}=1.$$

38. $$A=\frac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2-[a+b(1+ab)x]^2}=$$

$$=\frac{(1+ab)^2+(1+ab)(a+b)x-(a+b)^2-(a+b)(1+ab)x}{(1+ab)^2-(1+ab)^2x^2+(a+b)^2x^2-(a+b)^2}=$$

$$=\frac{(1+ab)^2-(a+b)^2}{(1+ab)^2(1-x^2)-(a+b)^2(1-x^2)}=$$

$$=\frac{(1+ab)^2-(a+b)^2}{(1-x^2)[(1+ab)^2-(a+b)^2]}=\frac{1}{1-x^2}.$$

39. $$A=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}+\frac{(x-x^2+1)(x+x^2-1)}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}+$$

$$+\frac{(x^2-x-1)(x^2-x+1)}{(x^2-x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{x-x^2+1}{x^2+x+1}+$$

$$+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x-1+x-x^2+1+x^2-x+1}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=1.$$

40. Рассматривая сумму первых двух слагаемых числителя как сумму кубов двух количеств или поступая так, как в задаче 13, получим следующее выражение для числителя: $3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$. Аналогично поступая со знаменателем, найдем, что он равен $3(x-y)(y-z)(z-x)$. Отсюда данное выражение

$$A=\frac{3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{3(x-y)(y-z)(z-x)}=(x+y)(y+z)(z+x).$$

41. $$A=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}=\frac{M}{N}.$$

$$M=a^3(c-b)+(b^3a-c^3a)+(-b^3c+c^3b)=a^3(c-b)-a(c^3-b^3)+$$
$$+bc(c^2-b^2)=(c-b)(a^3-ac^2-abc-ab^2+bc^2+b^2c)=$$
$$=(c-b)[(a^3-ab^2)+(-ac^2+bc^2)+(-abc+b^2c)]=$$
$$=(c-b)[a(a^2-b^2)-c^2(a-b)-bc(a-b)]=$$
$$=(c-b)(a-b)(a^2+ab-c^2-bc)=(c-b)(a-b)[(a^2-c^2)+$$
$$+(ab-bc)]=(c-b)(a-b)(a-c)(a+c+b).$$

Аналогичными преобразованиями получим, что знаменатель $N=(c-b)(a-b)(a-c)$. Впрочем, эти преобразования можно найти в решении задачи 34. Теперь получим

$$A=\frac{M}{N}=\frac{(c-b)(a-b)(a-c)(a+b+c)}{(c-b)(a-b)(a-c)}=a+b+c.$$

42. Замечая, что $\frac{1}{(x+k)(x+k+1)}=\frac{1}{x+k}-\frac{1}{x+k+1}$, получим

$$A=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)=$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{5}{x(x+5)}.$$

43. Рассмотрим произведение первого множителя на первое слагаемое второго множителя:

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b}=1+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=$$
$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{c(a-b)-(a^2-b^2)}{ab}=$$
$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(a-b)[c-(a+b)]}{ab}=1+\frac{c}{ab}[c-(a+b)],$$

а так как $c=-(a+b)$, то получим окончательно для этого произведения $1+\frac{2c^2}{ab}$. Точно так же произведение первого множителя на второе слагаемое второго множителя будет $1+\frac{2a^2}{bc}$ и на третье слагаемое $1+\frac{2b^2}{ca}$. Складывая полученные выражения и пользуясь результатом задачи 20, получим

$$1+\frac{2c^2}{ab}+1+\frac{2a^2}{bc}+1+\frac{2b^2}{ca}=3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=$$

$$=3+\frac{2\cdot 3abc}{abc}=3+6=9.$$

44. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=1+\frac{1}{2}+$

$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

45. Умножим первое равенство на q^2, второе — на p^2, третье — на $-2pq$ и результаты сложим почленно. Получим

$$(a_1q-b_1p)^2+(a_2q-b_2p)^2+\ldots+(a_nq-b_np)^2=0.$$

Следовательно,

$$a_1q-b_1p=a_2q-b_2p=\ldots=a_nq-b_np=0,$$

откуда и вытекает доказываемое равенство.

46. Преобразуем заданные отношения и воспользуемся свойством равных отношений:

$$\frac{a_1b_1}{b_1^2}=\frac{a_2b_2}{b_2^2}=\ldots=\frac{a_nb_n}{b_n^2}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}. \qquad (1)$$

Отсюда

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\frac{a_1}{b_1}(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2). \qquad (2)$$

Аналогичными преобразованиями получим

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\frac{b_1}{a_1}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2). \qquad (3)$$

Перемножая равенства (2) и (3) почленно, найдем

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

47. Все общие множители числителя и знаменателя данной дроби являются также множителями выражения $a(14n+3)+b(21n+4)$, где a и b — целые. Но при $a=3$ и $b=-2$ получим $3(14n+3)-2(21n+4)=1$. Таким образом, общими множителями членов дроби могут быть лишь числа ± 1, т. е. она несократима.

48. Так как $\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}$, то $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2}{c^2}$. Но из данной пропорции имеем $b^2=ac$. Подставляя это в правую часть полученной пропорции, найдем $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{ac}{c^2}=\frac{a}{c}$.

49. Из данной пропорции получаем

$$\frac{c_1a_1^n}{c_1b_1^n}=\frac{c_2a_2^n}{c_2b_2^n}=\ldots=\frac{c_ka_k^n}{c_kb_k^n}.$$

Отсюда, пользуясь свойством равных отношений, найдем

$$\frac{c_1a_1+c_2a_2^n+\ldots+c_ka_k^n}{c_1b_1^n+c_2b_2^n+\ldots+c_kb_k^n}=\frac{c_1a_1^n}{c_1b_1^n}=\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n.$$

50. Покажем, что никакая рациональная дробь $\frac{m}{n}$ (m и n — натуральные числа) не равна $\sqrt{2}$. Для доказательства допустим, что существует такая дробь $\frac{m}{n}$, что $\frac{m^2}{n^2}=2$. Предполагаем эту дробь несократимой, т. е. m и n не имеющими общих множителей. Из соотношения $\frac{m^2}{n^2}=2$ вытекает, что $m^2=2n^2$, а это означает, что число m есть четное. Положим $m=2p$ и, подставив в равенство $m^2=2n^2$, получим $4p^2=2n^2$ или $n^2=2p^2$. Но в таком случае число n тоже четное, чего не может быть, так как $\frac{m}{n}$ по предположению — несократимая дробь.

51. По определению корня кубичного из числа.

52. а) По определению нулевой степени числа ($a\neq0$); б) по определению дробной степени числа; в) по определению отрицательной степени числа ($a\neq0$); г) по определению первой степени числа.

53. $\sqrt{a^2}=|a|$. Или иначе: $\sqrt{a^2}=a$, если $a\geqslant0$; $\sqrt{a^2}=-a$, если $a\leqslant0$.

54. а) $x\geqslant0$, $y\geqslant0$; б) $x\geqslant0$, $y>0$; в) $a\geqslant0$, $b<0$, c — любое вещественное число; г) $a\leqslant0$, $b\geqslant0$.

55. Пользуясь свойством равных отношений, получим

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}$$

или, извлекая квадратный корень,

$$\frac{\sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}}{\sqrt{b_1+b_2+\ldots+b_n}}=\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}}.$$

С другой стороны, из данной пропорции находим

---

* Если некоторые из c_m ($m=1, 2, \ldots, k$) равны нулю, то для составления этих отношений используем лишь те c_m, которые не равны нулю.

$$\frac{a_1b_1}{b_1^2}=\frac{a_2b_2}{b_2^2}=\ldots=\frac{a_nb_n}{b_n^2}$$

или

$$\frac{\sqrt{a_1b_1}}{b_1}=\frac{\sqrt{a_2b_2}}{b_2}=\ldots=\frac{\sqrt{a_nb_n}}{b_n}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{\sqrt{a_1b_1}}{b_1}=\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}}.$$

Сравнивая левую часть этого равенства с такою же полученного ранее, легко найти равенство, которое нужно доказать

56—115. Указание. При решении этих задач следует помнить, что встречающиеся в них корни предполагаются арифметическими. Поэтому важно в тех случаях, когда наложены ограничения на параметры, уяснить себе, где эти ограничения используются, в прочих случаях наложить такие ограничения, если они должны быть наложены.

56. $$A=\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x+y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x+y}}\right]^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=$$

$$=\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x+y}}{x+2\sqrt{xy}+y-x-y}\right]^2-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(x+y)}{(2\sqrt{xy})^2}-$$

$$-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{xy}}-1\right)=\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=\frac{(x+y)^2}{4xy}.$$

57. $$A=\frac{\sqrt[3]{a}(a-8b)}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}}:\frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a^2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}[(\sqrt[3]{a})^3-(2\sqrt[3]{b})^3]}{(\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{a})(2\sqrt[3]{b})+(2\sqrt[3]{b})^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{a^2}=$$

$$=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2}=0.$$

58. $$A=\left[\frac{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{2b})^3}{(\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[3]{2b})^2}+\frac{\sqrt[3]{2ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})^2}\right]:$$

$$:\frac{(a+b)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})}{a+b}=\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2ab}+\sqrt[3]{4b^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}+\frac{\sqrt[3]{2ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}\right):$$

$$:(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})=\frac{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{4b^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})^2}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})^2}=1.$$

59. $$A=\frac{(\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2})^3(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-3}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+$$

$$+\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-$$

$$-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x^3}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-\sqrt{y^3}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{3x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{3\sqrt{x}(x-\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3}-$$

$$-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0.$$

60. $$A=\left[\frac{\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[3]{b})^2}-\frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{a+b}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})[(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3]}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}-1\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab})}{a+b}-1\right]^{-1}=$$

$$=\left(\frac{b}{a+b}-1\right)^{-1}=\left(\frac{-a}{a+b}\right)^{-1}=-\frac{a+b}{a}.$$

61. $A=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-2}-\sqrt{xy}}{x-y}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$

$=\dfrac{\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}-\sqrt{xy}}{x-y}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=1.$

62. $A=\dfrac{[\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}):(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2})+\sqrt{x}]\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{x+y-(x-\sqrt{xy}+y)}=$

$=\dfrac{(-\sqrt[4]{x^3}:(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})+\sqrt{x})\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt{xy}}=$

$=\dfrac{-\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt{x}\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt{xy}}=\dfrac{-\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=$

$=\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=1.$

63. $A=\left[\dfrac{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right]:\left[\dfrac{\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2}-1)}{\sqrt[3]{a}-1}-\right.$

$\left.-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a}+1)}{\sqrt[3]{a}+1}\right]=$

$=\left(\sqrt[4]{ab}+\dfrac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\left[\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a}+1)-\sqrt[3]{a^2}\right]=\dfrac{1}{\sqrt[4]{ab}}:\sqrt[3]{a}=\dfrac{1}{\sqrt[12]{a^7b^3}}.$

64. $A=\left[\dfrac{1-\sqrt{a}}{(1+\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2})-\sqrt{a}}\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt[4]{a^3}):(\sqrt[4]{a}+1)-\sqrt{a}}\right]^5=$

$=\left(\dfrac{1-\sqrt[4]{a^2}}{1+\sqrt[4]{a}}\cdot\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2}-\sqrt{a}}\right)^5=\left(\dfrac{1-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt[4]{a}}\right)^5=1.$

65. $A=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt[4]{bx}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right):\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)+\sqrt[4]{bx}\right]^2+bx+3}{\left(\sqrt{bx}+\sqrt{3}\right)^2}=$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[4]{bx}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+3}{\left(\sqrt{bx}+\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{bx}+bx+3}{\left(\sqrt{bx}+\sqrt{3}\right)^2}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{bx}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{bx}+\sqrt{3}\right)^2}=1.$

66. $A=\left[\sqrt[3]{\dfrac{x(x+a)^2}{x-a}}-\sqrt[3]{\dfrac{x(x-a)^2}{x+a}}\right]^{-1}\sqrt[3]{a}+$

$+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{a^2}}=\left[\sqrt[3]{\dfrac{x(x+a)^3}{x^2-a^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{x(x-a)^3}{x^2-a^2}}\right]^{-1}\sqrt[3]{a}+$

$+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{a^2-x^2}{a^2x}}=\left[\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2-a^2}}\,(x+a-x+a)\right]^{-1}\sqrt[3]{a}-$

$-\dfrac{1}{2a}\sqrt[3]{\dfrac{(x^2-a^2)a}{x}}=\left(2a\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2-a^2}}\right)^{-1}\sqrt[3]{a}-$

$-\dfrac{1}{2a}\sqrt[3]{\dfrac{(x^2-a^2)a}{x}}=\dfrac{1}{2a}\sqrt[3]{\dfrac{(x^2-a^2)a}{x}}-\dfrac{1}{2a}\sqrt[3]{\dfrac{(x^2-a^2)a}{x}}=0.$

67. $A=b\left\{\left[\dfrac{\sqrt[4]{a^2}\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)}{\sqrt[4]{a^2}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}-\sqrt[4]{ab}\right]:\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)-\sqrt[4]{a}\right\}^{-4}=$

$=b\left[\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{b^2}-\sqrt[4]{ab}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)-\sqrt[4]{a}\right]^{-4}=$

$=b\left[\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2:\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)-\sqrt[4]{a}\right]^{-4}=$

$=b\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)^{-4}=b\left(-\sqrt[4]{b}\right)^{-4}=b\cdot\dfrac{1}{b}=1.$

68. $A=\sqrt[3]{a}-\left[\dfrac{(1+a)\left(1+\sqrt[3]{a}\right)}{1-\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[3]{a^2}\right]\times$

$$\times \frac{(1+\sqrt[3]{a^3}):(\sqrt[3]{a}+1)-\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a^2}}\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a}-$$

$$-\left(\frac{1+a}{1-\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{a^2}\right)\frac{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a^2}}\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a}-$$

$$-\frac{1+a+\sqrt[3]{a^2}-a}{1-\sqrt[3]{a}}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{a}}{1+\sqrt[3]{a^2}}\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a}=0.$$

69. $A=\left(\frac{x\sqrt{x}+a\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\right.$

$$\left.+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}}\sqrt[10]{(x-a)^3}=$$

$$=\left(\frac{x\sqrt{x}+a\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{5}}\left[\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2+\sqrt{ax}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}\right]^{-\frac{1}{5}}\sqrt[10]{(x-a)^3}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{x-\sqrt{xa}+a}\right]^{\frac{1}{5}}(x-a)^{\frac{3}{10}}=$$

$$=[(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})]^{\frac{1}{5}}(x-a)^{\frac{3}{10}}=(x-a)^{\frac{1}{5}}(x-a)^{\frac{3}{10}}=$$

$$=(x-a)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x-a}.$$

70. $A=\left\{\frac{\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2x}):[\sqrt[3]{4x^2}(\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{a})]-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right\}^{-6}=$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[3]{4x^2}-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)^{-6}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[3]{4x^2}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2x})}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right]^{-6}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x^2}}\right)^{-6}=\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}}\right)^{-6}=$$

$$= \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4x^2}} \right)^{-6} = \frac{16x^4}{a^2}.$$

71. $A = \dfrac{[(a+x)(1+\sqrt{x})]^2(1-\sqrt{x})^2}{x^2-2x+1}\, x -$

$$-ax\sqrt{a^2+4ax+4x^2} = \frac{(a+x)^2(1-x)^2}{(x-1)^2}\, x - ax\sqrt{(a+2x)^2} =$$

$$= (a+x)^2 x - ax(a+2x)^* = x^3.$$

72. $A = \left[x\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}} - \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}} \right]^{\frac{3}{7}} : \sqrt[7]{x^2-1} =$

$$= \left[x\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}} - \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}} \right]^{\frac{3}{7}} : \sqrt[7]{x^2-1} =$$

$$= \left[\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}\,(x-1) \right]^{\frac{3}{7}} :$$

$$: \sqrt[7]{x^2-1} = (\sqrt[3]{x^2-1})^{\frac{3}{7}} : \sqrt[7]{x^2-1} = \sqrt[7]{x^2-1} : \sqrt[7]{x^2-1} = 1.$$

73. $A = \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{a}) : (\sqrt{x}-\sqrt{a}) - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}+2(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{x^2}) : (\sqrt{a}+\sqrt{x})} =$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{2}.$$

74. $A = \left[\sqrt[3]{\dfrac{a^3(a^2+2ab+4b^2)}{(a-2b)^2}} + \sqrt[3]{8b^3-a^3} \right] :$

$$: \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}} \right) =$$

$$= \left[\sqrt[3]{\frac{a^3(a^3-8b^3)}{(a-2b)^3}} - \sqrt[3]{a^3-8b^3} \right] : \frac{\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2b}-\sqrt{a}+\sqrt{2b})}{a-2b} =$$

* Здесь предполагается $a+2x \geqslant 0$.

$$=\sqrt[3]{a^3-8b^3}\left(\frac{a}{a-2b}-1\right):\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2b}}{a-2b}=$$

$$=\sqrt[3]{a^3-8b^3}\,\frac{2b}{a-2b}\cdot\frac{a-2b}{4\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\sqrt{b}\sqrt{a^3-8b^3}.$$

75. $A=\dfrac{\sqrt[3]{(b^3-3b^2)\sqrt{ab}+(3b-1)\sqrt{ab}}}{\sqrt[3]{b^3}-1}\sqrt[6]{b^5a}=$

$$=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{ab}(b-1)^3}}{b-1}\sqrt[6]{b^5a}=\sqrt[6]{ab}\sqrt[6]{b^5a}=\sqrt[6]{a^2b^6}=b\sqrt[3]{a}.$$

76. $A=\dfrac{(5-4x^2)\sqrt{5}+8\sqrt{5}x^2}{\sqrt{(5+4x^2)^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\sqrt{ax}=$

$$=\frac{(5+4x^2)\sqrt{5}}{5+4x^2}\sqrt{2ax}=\sqrt{10ax}.$$

77. $A=\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{x+\sqrt{x^2-1}}\right):\sqrt{x^2-1}=$

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{[x^2-(x^2-1)]\sqrt{x^2-1}}=\frac{4x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=4x.$$

78. $A=\left\{\left[\dfrac{a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b+2a-b}{a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b+2b-a}\right]^2:\sqrt[12]{\dfrac{a^2}{b^2}}\right\}\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\left[\dfrac{3\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{3\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}\right]^2\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}\sqrt{\dfrac{b}{a}}=$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^2\sqrt[6]{\frac{b}{a}\cdot\frac{b^3}{a^3}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}}=1.$$

79. $A=\left[\dfrac{\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2})}{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})}-1\right]\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}\right)=$

$$=\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}\right)=\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^3-1=$$

$$= \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}.$$

80. Из данного выражения и из условия $x>0$ видно, что допустимыми значениями для x являются те числа, которые удовлетворяют неравенствам $0<x<1$. Отсюда следует, что $\sqrt{x^2}=+x$, а $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$. Имея это в виду, преобразуем выражение так:

$$A = \left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x})^2}\right]\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} =$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(1+x)-(1-x)} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} =$$

$$= \frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1-x^2})^2-1}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

81. $$A = \left(\frac{a^{-\frac{1}{6}} - 5c^{-\frac{1}{6}} - 5a^{-\frac{1}{6}} + 5c^{-\frac{1}{6}}}{a^{-\frac{1}{3}} - c^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-1} \frac{6\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}} =$$

$$= \left(\frac{-4a^{-\frac{1}{6}}}{a^{-\frac{1}{3}} - c^{-\frac{1}{3}}}\right) \frac{6\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}} = \frac{a^{-\frac{1}{3}} - c^{-\frac{1}{3}}}{-4a^{-\frac{1}{6}}} \cdot \frac{6\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}{4\sqrt[3]{ac}} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \frac{6\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}} = \frac{3\sqrt[6]{a^2}}{2\sqrt[3]{ac}} = \frac{3\sqrt[3]{c^2}}{2c}.$$

82. $$A = \frac{(\sqrt{5}+1)(1-\sqrt{5}+\sqrt{x})+(\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{5}+\sqrt{x})}{2[(1+\sqrt{x})^2-(\sqrt{5})^2]} \times$$

$$\times \frac{x+2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\sqrt{5}} = \frac{1-5+(\sqrt{5}+1)\sqrt{x}+5-1+(\sqrt{5}-1)\sqrt{x}}{2(x+2\sqrt{x}-4)} \times$$

$$\times\frac{x+2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{5}}{2\sqrt{x}\sqrt{5}}=1.$$

83. Так как $\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})}\ \sqrt{2+\sqrt{5}}=$

$$=\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})(2+\sqrt{5})^2}=\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=$$

$$=\sqrt[4]{9^2-(4\sqrt{5})^2}=\sqrt[4]{81-80}=1,$$

то данное выражение

$$A=\left[2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{b}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2a}+\sqrt[4]{b}}\right)^{-2}\right]:$$

$$:\left(1-2\sqrt{\frac{b}{2a}}+\frac{b}{2a}\right)=\left[2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{2\sqrt[4]{2a}}{\sqrt{4a^2}-\sqrt{b^2}}\right)^{-2}\right]:$$

$$:\left(1-\sqrt{\frac{b}{2a}}\right)^2=2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{2\sqrt[4]{2a}}\right)^2:\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}}\right)^2=$$

$$=2\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{(\sqrt{2a}-\sqrt{b})^2}{4\sqrt{2a}}\cdot\frac{2a}{(\sqrt{2a}-\sqrt{b})^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot a=1.$$

84. $A=\left[\frac{(\sqrt{ab}-b+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(a+\sqrt{ab}-a)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\right]:$

$$:\left[1+\frac{2\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}\right]=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right):$$

$$:\left(1+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}{2\sqrt{ab}}\right)\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1+$$

$$+\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2\sqrt{ab}}=\frac{2\sqrt{ab}+a-2\sqrt{ab}+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

85. Так как $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\sqrt{6-4\sqrt{2}}=$

$$=\sqrt[6]{(20+14\sqrt{2})^2(6-4\sqrt{2})^3}=$$

$$=\sqrt[6]{2^2(10+7\sqrt{2})^2\cdot 2^3(3-2\sqrt{2})^3}=$$

$$= \sqrt[6]{2^5 (198 + 140\sqrt{2})(99 - 70\sqrt{2})} =$$

$$= \sqrt[6]{2^6 (99 + 70\sqrt{2})(99 - 70\sqrt{2})} =$$

$$= 2\sqrt[6]{99^2 - (70\sqrt{2})^2} = 2\sqrt[6]{9801 - 9800} = 2,$$

то данное выражение

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{a\sqrt{a} - 3a + 3\sqrt{a} - 1}\right) :$$

$$: \left[\frac{\sqrt{a^2} - 1}{2(\sqrt{a} + 1)} + 1\right] = \left[1 + \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{a} - 1)^3}}{2}\right] : \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{2} + 1\right) =$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{a} - 1}{2}\right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{2} = \frac{\sqrt{a} + 1}{2} : \frac{\sqrt{a} + 1}{2} = 1.$$

86. $A = 9\left(\sqrt[6]{4 \cdot 54} - \sqrt[6]{9 \cdot \frac{3}{8}}\right)^{-4} -$

$$- \sqrt[6]{(3 - 2\sqrt{2})^3 \cdot 8^2 (5\sqrt{2} + 7)^2} : \sqrt[3]{8} =$$

$$= 9\left(\sqrt[6]{8 \cdot 27} - \sqrt[6]{\frac{27}{8}}\right)^{-4} -$$

$$- 2\sqrt[6]{(99 - 70\sqrt{2})(99 + 70\sqrt{2})} : 2 =$$

$$= 9\left(\sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{-4} - \sqrt[6]{99^2 - (70\sqrt{2})^2} = 9\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^{-4} -$$

$$- \sqrt[6]{9801 - 9800} = 9\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^4 - 1 = 9 \cdot \frac{2^4}{6^2} - 1 = 9 \cdot \frac{2^2}{3^2} - 1 =$$

$$= 4 - 1 = 3.$$

87. $A = \left[\sqrt[6]{\frac{(1-a)^3(1+a)}{a^3} \cdot \frac{9a^4}{16(1-a)^4}}\right]^{-1} : \sqrt[6]{\frac{4(1-a^2)}{9a^3}} =$

$$= \sqrt[6]{\frac{16(1-a)}{9a(1+a)}} \cdot \sqrt[6]{\frac{9a^3}{4(1-a^2)}} = \sqrt[6]{\frac{16(1-a)}{9a(1+a)} \cdot \frac{9a^3}{4(1-a^2)}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{4a^2}{(1+a)^2}} = \sqrt[3]{\frac{2a}{1+a}}$$

88. $A = \left[\frac{\sqrt[4]{1-x}}{2\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{\sqrt[4]{1+x}}{2\sqrt[4]{(1-x)^3}}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} =$

$$= \frac{1 - x + 1 + x}{2\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[4]{1+x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{1-x}}{2\sqrt[4]{(1+x)^4(1-x)^3}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1+x)\sqrt[4]{(1+x)^2}\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2}.$$

89. $A = x^3\left[\frac{2\left(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{y^2}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right]^5\sqrt[3]{x\sqrt{x}} =$

$$= x^3\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5\sqrt[6]{x^3} = x^3\cdot\frac{32}{x^2\sqrt{x}}\sqrt{x} = 32x.$$

90. $A = x(x-y)\sqrt{x-y} + y(2x+3y)\sqrt{x-y} +$

$$+ 2xy\sqrt{x-y} - (x+y)^2\sqrt{x-y} = (x^2 - xy + 2xy +$$

$$+ 3y^2 + 2xy - x^2 - 2xy - y^2)\sqrt{x-y} = y(x+2y)\sqrt{x-y}.$$

91. $A = \frac{\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(a-\sqrt{1+a^2}\right) - \left(\sqrt{1+a^2}-a\right)\left(\sqrt{1+a^2}+a\right)}{\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1+a^2}+a\right)\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)} =$

$$= \frac{\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(2a-2\sqrt{1+a^2}\right)}{\sqrt{1+a^2}\left(a+\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)\right.} = -\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}.$$

92. $A = \sqrt{\frac{(p+q)^2}{p(p^2-q^2)}\,p(p+q)} - \sqrt{\frac{(p-q)^2}{p^2-q^2}\,(p+q)} =$

$$= \sqrt{\frac{(p+q)^2}{p-q}} - \sqrt{\frac{(p-q)^2}{p-q}}.$$

Так как $p > q > 0$, то $\sqrt{(p+q)^2} = p+q$; $\sqrt{(p-q)^2} = p-q$. Отсюда

$$A = \frac{p+q}{\sqrt{p-q}} - \frac{p-q}{\sqrt{p-q}} = \frac{2q}{\sqrt{p-q}}.$$

93. $A = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}\left[\left(1-\sqrt{x}\right)^2+\left(1+\sqrt{x}\right)^2\right]}\left[\frac{1+\sqrt[4]{x}-1+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x}\left(1-\sqrt[4]{x^2}\right)}\right]^2 -$

$$- \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)} = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}(1+x)}\cdot\frac{1}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)} = \frac{-2x}{2\sqrt{x}(1-x^2)} = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}.$$

94. $A = \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} +$

$$+ \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+2\right)} =$$

$$= \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{2+\sqrt[3]{x}}{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} = 2 - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 2.$$

95. $A = \dfrac{(m+x)^2-1}{(m+x-1)^2} : \left(\dfrac{2mx-1+m^2+x^2}{2mx}\right)^{-1} =$

$$= \frac{m+x+1}{m+x-1} \cdot \frac{(m+x)^2-1}{2mx} = \frac{(m+x+1)^2}{2mx} =$$

$$= \frac{(m-1)^2(m+x+1)^2}{2m(m-1)^2x} = \frac{[m^2-1+(m-1)x]^2}{2m(m-1)^2x}.$$

Но $x(m-1)=1$.

Поэтому $A = \dfrac{(m^2-1+1)^2}{2m(m-1)} = \dfrac{m^4}{2m(m-1)} = \dfrac{m^3}{2(m-1)}$.

96. Так как $k > 1$, то

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \left[1 - \frac{4k}{(1+k)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{(1+k)^2}{(1-k)^2}} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k-1} + 1\right) = \frac{k}{k-1},$$

$$\frac{1}{2}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1\right] = \frac{1}{k-1}.$$

Отсюда

$$A = \left(\frac{k}{k-1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{k-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} +$$

$$+ \sqrt{k-1} = \sqrt{k-1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

97. $A = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-2} + \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{-2} = \dfrac{x^2}{(x+1)^2} + \dfrac{x^2}{(x-1)^2} =$

$$= x^2 \cdot \frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{2x^2(1+x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2(n+1)^2x^2(1+x^2)}{(n+1)^2(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2(n+1)x^2[(n+1)+(n+1)x^2]}{[(n+1)x^2-(n+1)]^2}.$$

Но $x^2 = \dfrac{1-n^{-1}}{1+n^{-1}} = \dfrac{n-1}{n+1}$, а $x^2(n+1) = n-1$. Поэтому

$$A = \frac{2(n-1)[(n+1)+(n-1)]}{[(n-1)-(n+1)]^2} = \frac{2(n-1)\cdot 2n}{4} = n(n-1).$$

98. Так как $a > 0$, $b > 0$ и, следовательно, $\sqrt{a^2} = a$ и

$\sqrt{b^2} = b$, то $(a+x)(b+x) = \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{b^2} + \sqrt{ab}\right) =$
$= \sqrt{ab}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, а $(a-x)(x-b) =$
$= \sqrt{ab}\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$. Так как $a > b$, то

$$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

Поэтому

$$A = \left[\frac{\sqrt{(a-x)(x-b)} - \sqrt{(a+x)(x+b)}}{\sqrt{(a-x)(x-b)} + \sqrt{(a+x)(x+b)}}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + \sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b})}\right]^2 = \left(\frac{-2\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b}{a}.$$

99. $x + a = a\,\dfrac{m^3 + n^2}{m^3 - n^3} + a = a\,\dfrac{m^3 + n^3 + m^3 - n^3}{m^3 - n^3} =$

$$= \frac{2m^3 a}{m^3 - n^3};\quad x - a = \frac{2n^3 a}{m^3 - n^3};\quad \frac{x+a}{x-a} = \frac{m^3}{n^3}.$$

Поэтому данное выражение

$$A = \left(\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} + \sqrt[3]{\frac{x-a}{x+a}} - 2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[3]{\frac{m^3}{n^3}} + \sqrt[3]{\frac{n^3}{m^3}} - 2\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - 2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{m^2 + n^2 - 2mn}{mn}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{mn}{(m-n)^2}}.$$

Но $m > n$ и, следовательно, $\sqrt{(m-n)^2} = m - n$, так что

$$A = \frac{\sqrt{mn}}{m-n}.$$

100. После вынесения $x^{\frac{2}{m}}$ за скобку получим

$$x^{\frac{2}{m}}\left[\left(1 + x^{\frac{m-n}{mn}}\right)^2 - 4a^2 x^{\frac{m-n}{mn}}\right] = x^{\frac{2}{m}} \cdot M.$$

Но $x^{\frac{m-n}{mn}} = (a + \sqrt{a^2 - 1})^2$ и $1 + x^{\frac{m-n}{mn}} = 1 +$
$+ (a + \sqrt{a^2 - 1})^2 = 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 1} = 2a\,(a + \sqrt{a^2 - 1})$.
Поэтому

$$M = \left[2a\,(a + \sqrt{a^2 - 1})\right]^2 - 4a^2\,(a + \sqrt{a^2 - 1})^2 =$$

$$= 4a^2\,(a + \sqrt{a^2 - 1})^2 - 4a^2\,(a + \sqrt{a^2 - 1})^2 = 0 \text{ и } x^{\frac{2}{m}} \cdot M = 0.$$

101. $\left(a+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(a+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(a+2\sqrt{a-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$$=\left[(a-1)+2\sqrt{a-1}+1\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\sqrt{a-1}+1\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1}.$$

Аналогично получим

$$\left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(a-\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Если 1) $1<a<2$, то $\sqrt{a-1}<1$,

$$\sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}=1-\sqrt{a-1},\ \left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(1-\sqrt{a-1}\right)^{-1}=\frac{1}{1-\sqrt{a-1}}.$$

Поэтому данное выражение

$$A=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{a-1}}=\frac{1}{2-a}.$$

Если 2) $a>2$, то $\sqrt{a-1}>1$, $\sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}=$

$$=\sqrt{a-1}-1,\ \left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{a-1}-1\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a-1}-1};\ A=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{a-1}-1}=\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}.$$

102. $A=\left(\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}\right)^2=$

$$=\left[\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2}\right)^2}{(x^2-a^2)-(x^2+a^2)}\right]^2=\left[\frac{2x^2-2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}}{-2a^2}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left[x^2-\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}\right]^2.$$

Но $x^2=a^2\cdot\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$, $(x^2+a^2)(x^2-a^2)=$

$$=\left(a^2\cdot\frac{m^2+n^2}{2mn}+a^2\right)\left(a^2\cdot\frac{m^2+n^2}{2mn}-a^2\right)=$$

$$=a^4\cdot\frac{(m+n)^2(m-n)^2}{4m^2n^2}=a^4\cdot\frac{(m^2-n^2)^2}{4m^2n^2},\ \sqrt{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=$$

$= a^2 \cdot \frac{n^2 - m^2}{2mn}$, так как $n > m > 0$ и, следовательно,

$$\sqrt{(m^2 - n^2)^2} = n^2 - m^2, \text{ а } \sqrt{m^2 n^2} = mn.$$

Теперь можем написать, что

$$A = \frac{1}{a^4}\left(a^2 \cdot \frac{m^2 + n^2}{2mn} - a^2 \cdot \frac{n^2 - m^2}{2mn}\right)^2 = \left(\frac{2m^2}{2mn}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

103. $A = \frac{(\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x})^2}{(\sqrt{m+x})^2 - (\sqrt{m-x})^2} = \frac{2m + 2\sqrt{m^2 - x^2}}{2x} =$

$$= \frac{m}{x} + \sqrt{\left(\frac{m}{x}\right)^2 - 1}.$$

Подводя множитель x под знак радикала, мы считали $\sqrt{x^2} = x$, потому что $x > 0$, как это следует из условия.

Так как $\frac{m}{x} = \frac{n^2 + 1}{2n}$, то $A = \frac{n^2 + 1}{2n} + \sqrt{\left(\frac{n^2 + 1}{2n}\right)^2 - 1} =$

$= \frac{n^2 + 1}{2n} + \sqrt{\left(\frac{n^2 - 1}{2n}\right)^2}$. Но $0 < n < 1$, и поэтому

$$\sqrt{\left(\frac{n^2 - 1}{2n}\right)^2} = \frac{1 - n^2}{2n}.$$

Таким образом,

$$A = \frac{n^2 + 1}{2n} + \frac{1 - n^2}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}.$$

104. $A = \left[x^{-\frac{4}{3}}\left(x^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} +$

$$+ \left[a^{-\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}}\left(x^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ a^{\frac{2}{3}}\left(x^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(x^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= \left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}}. \text{ Но } x^{\frac{1}{3}} = \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}, \; x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}}.$$

Поэтому

$$A = \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

105. $A = \dfrac{2a\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - x^2} =$

$$= 2a\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right).$$

Но

$$x = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}};\quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^2} = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Поэтому

$$A = 2a \cdot \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right) = \frac{a(a+b)}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{2b}{2\sqrt{ab}} = a+b.$$

106. Подставляем в выражение $x^3 + 12x$ значение x и пользуемся формулой

$$(m-n)^3 = m^3 - 3mn(m-n) - n^3.$$

$$A = \left[\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}+1\right)}\right]^3 - 3\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}+1\right)}\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}-1\right)}\,x -$$

$$- \left[\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}-1\right)}\right]^3 + 12x = 4\sqrt{5} + 4 - 3\sqrt[3]{64}x -$$

$$- 4\sqrt{5} + 4 + 12x = 8 - 12x + 12x = 8.$$

107. Подставляем значение x в выражение $x^3 + ax + b$ и пользуемся формулой $(m+n)^3 = m^3 + 3mn(m+n) + n^3$.

$$A = \left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}\right)^3 +$$

$$+ 3\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}\,x +$$

$$+ \left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}\right)^3 + ax + b = -b +$$

$$+ 3\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)}\,x + ax + b =$$

$$= 3\sqrt[3]{-\frac{a^3}{27}}\,x + ax = -ax + ax = 0.$$

108. Вынесем за скобки $x^{\frac{1}{n}}$. Получим

$$A = x^{\frac{1}{n}}\left[\frac{a+x}{ax}\cdot\frac{(a+x)^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} - b^{-1}\right] =$$

$$= x^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{a}{x}+1\right)\left(\frac{a}{x}+1\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{b}\right] =$$

$$= x^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{a}{x}+1\right)^{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{b}\right] = x^{\frac{1}{n}}\cdot M.$$

Но $x = ab^{\frac{n}{n+1}} : (a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}})$; $\frac{a}{x} = (a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}}) : b^{\frac{n}{n+1}} =$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1; \quad 1 + \frac{a}{x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Отсюда $M = \frac{1}{a}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} : \frac{a}{b} - \frac{1}{b} = 0$

и $A = x^{\frac{1}{n}}\cdot M = 0.$

109. Так как $\sqrt{2+\sqrt{5}}\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} =$

$$= \sqrt[6]{(2+\sqrt{5})^3(-38+17\sqrt{5})} =$$

$$= \sqrt[6]{(38+17\sqrt{5})(-38+17\sqrt{5})} =$$

$$= \sqrt[6]{(17\sqrt{5})^2 - 38^2} = 1,$$

то данное выражение

$$A = \frac{1-mx}{1+mx}\cdot\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}.$$

Преобразуем теперь каждый множитель отдельно:

$$\frac{1-mx}{1+mx} = \frac{1-\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{1+\sqrt{\frac{2m}{n}-1}} = \frac{\left(1-\sqrt{\frac{2m}{n}-1}\right)^2}{1-\left(\frac{2m}{n}-1\right)} =$$

$$= \frac{\frac{2m}{n} - 2\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{2-\frac{2m}{n}} = \frac{m-n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m};$$

$$\frac{1+nx}{1-nx}=\frac{1+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{1-\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}=\frac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{m-n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}=$$

$$=\frac{\left(m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}\right)^2}{m^2-n^2\left(\frac{2m}{n}-1\right)}=\frac{\left(m+n+\sqrt{\frac{2m}{n}-1}\right)^2}{(m-n)^2};$$

$$\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}=\frac{m+n+\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m},$$

так как из условия $n>m$ следует, что $\sqrt{(m-n)^2}=n-m$.

Итак, $A=\dfrac{m-n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}\cdot\dfrac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}=$

$$=\frac{m^2-n^2\left(\frac{2m}{n}-1\right)}{(n-m)^2}=\frac{(m-n)^2}{(m-n)^2}=1.$$

110. $A=\sqrt[n]{x^{\frac{n^2}{n+1}}\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)}+$

$$+\sqrt[n]{a^{\frac{n^2}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}\right)}-1=$$

$$=\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}}\left(\sqrt[n]{x^{\frac{n^2}{n+1}}}+\sqrt[n]{a^{\frac{n^2}{n+1}}}\right)-1=$$

$$=\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)-1=\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}-1.$$

Но $x^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}$, а $x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}$. Поэтому

$$A=\left(b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}-1=b-1.$$

111. $A=\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}\left(\sqrt[n]{\frac{a^kx^{n-k}}{a^{n-k}x^k}}+1-\right.$

$$\left.-2\sqrt{b}\sqrt[2n]{\frac{x^n}{a^{2n-2k}x^{2k}}}\right)+b^2=$$

$$= \sqrt[n]{a^{n-k}x^k}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{n}} - 2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}} + 1\right] + b^2.$$

Но

$$\frac{x}{a} = \frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{b-a}\right)^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{n}{n-2k}}}; \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{b-a}}{\sqrt{a}} =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a} - 1}.$$

Поэтому

$$A = \sqrt[n]{a^{n-k}x^k}\left[\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a} - 1}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{\frac{b}{a} - 1}\right) + 1\right] + b^2 = \left(\frac{b}{a} - 2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{b}{a} - 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{a} - 1 - 2 \cdot \frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{b}{a} - 1} + 1\right) + b^2 = b^2.$$

112. Так как $\frac{x+1}{x-1} = (2+\sqrt{3})^n$, то

$$A = \sqrt[n]{(x-1)^2}\left[\left(\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2 + 1 - 4\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right] + 1 =$$

$$= \sqrt[n]{(x-1)^2}\left[(2+\sqrt{3})^2 + 1 - 4(2+\sqrt{3})\right] + 1 =$$

$$= \sqrt[n]{(x-1)^n}\left(4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1 - 8 - 4\sqrt{3}\right) + 1 = 1.$$

113. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n -$

$$- \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) -$$

$$- \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{3+\sqrt{5}}{2} -$$

$$- \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} -$$

$$- \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

114. Воспользуемся формулой

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

для преобразования знаменателя левой части доказываемого равенства. Получим

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{b^2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+|b|}{2}} + \sqrt{\frac{a-|b|}{2}}.$$

Обозначая левую часть равенства буквой A и используя полученное выражение для знаменателя, можем написать

$$A = b\sqrt{2} \cdot \frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\frac{a+|b|}{2}} + \sqrt{\frac{a-|b|}{2}}} =$$

$$= 2b \frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+|b|}+\sqrt{a-|b|}} =$$

$$= 2b \frac{(2a+\sqrt{a^2-b^2})(\sqrt{a+|b|}-\sqrt{a-|b|})}{(a+|b|)-(a-|b|)} =$$

$$= \frac{b}{|b|}[a+|b|+\sqrt{(a+|b|)(a-|b|)}+a-|b|](\sqrt{a+|b|}-\sqrt{a-|b|}) =$$

$$= \frac{b}{|b|}[(\sqrt{a+|b|})^3-(\sqrt{a-|b|})^3].$$

Если $|b|<a$, то все выполненные выкладки будут справедливы, так как корни являются арифметическими. Полученное выражение равно правой части доказываемого равенства. Действительно, при $0<b<a$ имеем $|b|=b$ и утверждение очевидно. Если $b<0$, то $|b|=-b$. В этом случае получим

$$-[(\sqrt{a-b})^3-(\sqrt{a+b})^3] = (\sqrt{a+b})^3-(\sqrt{a-b})^3,$$

т. е. то, что и требовалось доказать.

115. Пользуясь формулой преобразования радикала $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ (см. решение задачи 114), получим

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}} =$$

$$=2\sqrt{\frac{x+2\sqrt{(x-2)^2}}{2}}=2\sqrt{\frac{x+2-x}{2}}=2.$$

Здесь мы положили $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$, так как по условию $x\leqslant 2$.

II.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

116. Существование единственного решения $x=-\frac{b}{a}$ уравнения $ax+b=0$ при $a\neq 0$ вытекает из однозначной выполнимости деления в любом числовом поле.

117. Необходимость. Пусть данные уравнения совместны, т. е. существует такое значение x, которое удовлетворяет и первому уравнению, и второму. Так как каждое из них имеет единственное решение и эти решения суть $x=-\frac{b_1}{a_1}$ и $x=-\frac{b_2}{a_2}$, то отсюда получаем

$$-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2} \text{ или } a_1b_2-a_2b_1=0.$$

II. Достаточность. Пусть выполнено условие $a_1b_2-a_2b_1=0$. Из него следует, что $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$ или $-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}$. Но $-\frac{b_1}{a_1}$ и $-\frac{b_2}{a_2}$ являются решениями соответственно первого и второго уравнений, в чем можно убедиться подстановкой этих значений в уравнения. Выходит, что рассматриваемые уравнения имеют общее решение, т. е. они совместны.

118. Совместны. Их общий корень $x=-1$.

119. Совместны. Их общий корень $x=4$.

120. Вычтем из первого уравнения второе. Получим $(a-1)(x-1)=0$. Отсюда $a=1$ или $x=1$. Подставляем $x=1$ в первое уравнение. Эта подстановка дает $a=-2$. Следовательно, уравнения совместны при $a=1$ и $a=-2$.

121. Равносильны, так как второе получено из первого прибавлением к обеим частям равенства одного и того же многочлена x^2+1.

122. Не равносильны. Первое имеет корни 1 и 2, а второе только корень 2.

123. Не равносильны. Первое имеет только один корень $x=-1$, а второе только один корень $x=1$. Число -1 не является корнем второго уравнения в области вещественных чисел, так как $\sqrt{x-1}$ в этом случае не имеет смысла.

124. Не равносильны в поле действительных чисел. Первое имеет корни $x=8$ и $x=-1$, а второе только $x=8$.

125. $a(a-1)x=2(a-1)$. Если $a\neq 0$ и $a\neq 1$, то $x=\frac{2}{a}$. Если $a=0$, то уравнение не имеет решений. Если $a=1$, то уравнение удовлетворяется любым значением x.

126. $\left(\frac{x-mn}{m+n}-p\right)+\left(\frac{x-pm}{p+m}-n\right)+\left(\frac{x-np}{n+p}-m\right)=0$,

$$\frac{x-(mn+np+pm)}{m+n}+\frac{x-(mn+np+pm)}{p+m}+\frac{x-(mn+np+pm)}{n+p}=0,$$

$$\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{p+m}+\frac{1}{n+p}\right)[x-(mn+np+pm)]=0.$$

Если $\frac{1}{m+n}+\frac{1}{p+m}+\frac{1}{n+p}\neq 0$, то $x=mn+np+pm$. Если $\frac{1}{m+n}+\frac{1}{p+m}+\frac{1}{n+p}=0$, то уравнение удовлетворяется любым значением x.

127. $\left(\frac{a+b-x}{c}+1\right)+\left(\frac{b+c-x}{a}+1\right)+\left(\frac{c+a-x}{b}+1\right)-$

$$-\left(4-\frac{4x}{a+b+c}\right)=0,\quad (a+b+c-x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{a+b+c}\right)=0.$$ Множитель $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}$ не равен нулю. Действительно, пусть, например, $a\geqslant b\geqslant c>0$ (случай отрицательных a, b и c легко привести к рассматриваемому). Тогда

$$A=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}-4\right)=$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left[\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\left(\frac{a+b}{c}-1\right)\right]\neq 0,$$

так как все слагаемые в квадратных скобках положительны $\left(\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{c+c}{c}>2\right)$. Сократив последнее уравнение на этот множитель, получим $a+b+c-x=0$, откуда $x=a+b+c$.

128. Так как $|a|=a$, если $a\geqslant 0$, и $|a|=-a$, если $a\leqslant 0$, то дан-

ное уравнение при $x \geqslant 1$ приводится к уравнению $x-1=2$, а при $x<1$ — к уравнению $-(x-1)=2$. Из первого найдем $x_1=3$, а из второго $x_2=-1$.

129. Если $x \leqslant 1$, то $|x-1|=1-x$, $|x-2|=2-x$ и данное уравнение приводится к такому: $1-x+2-x=1$. Из него находим $x=1$. Если $1<x \leqslant 2$, то $|x-1|=x-1$ и $|x-2|=2-x$. Левая часть данного уравнения равна 1 при всяком x из рассматриваемого промежутка, а так как правая тоже равна 1, то при всяком x, удовлетворяющем соотношениям $1<x \leqslant 2$, уравнение удовлетворяется. Наконец, если $x>2$, то $|x-1|=x-1$, $|x-2|=x-2$, и данное уравнение приводится к уравнению $x-1+x-2=1$, которое не имеет решений $x>2$. Итак, уравнение удовлетворяется, если $1 \leqslant x \leqslant 2$.

130. Поступая так же, как в задаче 129, найдем, что данное уравнение приводится к следующим смешанным (т. е. содержащим равенство и неравенство) системам:

1) $2-x+3-x+8-2x=9$, $x \leqslant 2$;
2) $x-2+3-x+8-2x=9$, $2<x \leqslant 3$;
3) $x-2+x-3+8-2x=9$, $3<x \leqslant 4$;
4) $x-2+x-3+2x-8=9$, $x>4$.

Первое уравнение имеет корень $x=1$, который удовлетворяет неравенству $x<2$. Второе уравнение имеет корень $x=0$, но он не удовлетворяет неравенствам $2<x \leqslant 3$. Третье уравнение не имеет решений, так как его левая часть равна 3, а правая 9. Четвертое уравнение имеет решение $x=\frac{11}{2}$, которое удовлетворяет неравенству $x>4$. Поэтому данное уравнение имеет следующие решения: $x_1=1$, $x_2=\frac{11}{2}$.

131. $40(|x|-1)-5(|x|-5)+4(14-2|x|)=80(|x|-9)-140$, $53|x|=901$, $|x|=17$; $x_1=17$, $x_2=-17$.

132. После легких преобразований получим $4x+8=5|3x-5|$. Если $|3x-5|=3x-5$, т. е. если $x>\frac{5}{3}$, то $4x+8=15x-25$ и $x=3$. Если $|3x-5|=5-3x$, то найдем $x=\frac{17}{19}$.

133. Поступая так же, как в задаче 132, найдем $x=4$. В отличие от предыдущей задачи здесь только одно решение, так как предположение $|3x-2|=2-3x$ приводит к противоречию.

134. Преобразуем числитель, воспользовавшись формулой суммы кубов двух количеств. Получим

$$\frac{(2m-3n)\left[(2m-ax)^2-(2m-ax)(ax-3n)+(ax-3n)^2\right]}{(2m-ax)^2+(ax-3n)^2}=2m-3n.$$

Если $2m-3n\neq 0$, то, сократив обе части уравнения на $2m-3n$, освободив уравнение от дробей и приведя подобные, найдем $(2m-ax)(ax-3n)=0$. Отсюда $x_1=\frac{2m}{a}$, $x_2=\frac{3n}{a}$. Если же $2m-3n=0$, то уравнение удовлетворяется любым x, не равным $\frac{2m}{a}$.

135. Является.

136. Одно, а не три, как иногда говорят учащиеся, потому что по определению решением системы называется такая совокупность численных значений неизвестных, которая удовлетворяет каждому уравнению системы.

137. Могут быть эквивалентными, но могут и не быть. Например, системы

$$\begin{cases} x+y-2=0; \\ x-3y+2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x-y-2=0; \\ 6x-2y-4=0 \end{cases}$$

имеют общее решение $x=y=1$, но не эквивалентны.

138. Может быть эквивалентна данной системе, но может и не быть. Так, например, взяв $m_1=1$, $m_2=2$, $n_1=2$, $n_2=4$ для системы

$$\begin{cases} x+2y-4=0; \\ 2x-3y-1=0 \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} 5x-4y-6=0; \\ 10x-8y-12=0. \end{cases}$$

Система первая не эквивалентна системе второй.

139. Всякое решение системы (*), очевидно, является решением системы (**) при любых m_1, m_2, n_1, n_2. Возьмем теперь решение системы (**). Оно, будучи подставлено в уравнения этой системы, обратит каждое уравнение в верное числовое тождество. Умножим первое из них на n_2, второе на m_2 и из первого результата вычтем второй. Получим

$$(m_1n_2-m_2n_1)A=0.$$

Но $m_1n_2-m_2n_1\neq 0$, поэтому $A=0$, а это и означает, что решение системы (**) является решением первого уравнения системы (*).

Аналогично можно показать, что это решение удовлетворяет и уравнению $B=0$.

Если же система (*) не имеет решения, то и система (**) его тоже не имеет.

140. Нет, не верно. В качестве примера, для которого это утверждение не имеет места, можно взять следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} ax+by+c=0; \\ ax+by+c=0. \end{cases}$$

Однако, если в первой системе задачи 139 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то для такой системы, как легко показать, сформулированное в задаче предложение верно.

141. Нужно, если предварительно не была доказана теорема, сформулированная в задаче 139. На самом деле, система

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_2b_1-c_1b_2}{a_1b_2-a_2b_1}; \\ y=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}; \end{cases}$$

являясь выводной из данной, очевидно, удовлетворяется теми значениями x и y, которыми удовлетворяется данная. Но есть ли такие числа, иначе говоря, существует ли решение у данной системы,— из решения не вытекает. Таким образом, можно лишь утверждать, что если данная система имеет решение, то найденные значения x и y дадут его. Существование решения мы докажем, если проверим подстановкой, что найденные значения x и y удовлетворяют данной системе.

142. Умножая первое уравнение на b_2, а второе на $-b_1$ и складывая новые уравнения, получим

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+c_1b_2-c_2b_1=0.$$

Умножая первое данное уравнение на $-a_2$, а второе на a_1 и складывая, получим

$$(a_1b_2-a_2b_1)y+c_2a_1-c_1a_2=0.$$

Так как $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то новая система, имеющая единственное решение, эквивалентна данной (задача 139).

143. Если $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ есть несократимая дробь, т. е. если числитель и знаменатель ее не имеют общих множителей, то уравнения $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$ и $P(x)=0$ равносильны. В общем случае — не равносильны.

144. Корни второго уравнения, очевидно, являются корнями первого. Однако не всякий корень первого уравнения удовлетворяет второму. Поэтому в общем случае они не эквивалентны.

145. Решив систему двух первых уравнений, найдем $x=2$, $y=1$. Подставив эти числа в третье уравнение, получим $a=3$.

146. Известно, что система

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1; \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

будет несовместна, если отношения коэффициентов при одинако-

вых неизвестных равны, но они не равны отношению свободных членов, т. е. если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, и неопределенна, если три коэффициента одного уравнения пропорциональны трем соответствующим коэффициентам другого, т. е. если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. Применяя это к данной системе, устанавливаем, что для неопределенности ее нужно, чтобы $\frac{9}{3}=\frac{a}{-4}=\frac{b}{12}$, т. е. чтобы $a=-12$ и $b=36$, а для несовместности $a=-12$ и $b\neq 36$.

147. Решив первые два уравнения относительно x и y, найдем:

$$x=-\frac{(k+1)^2}{k^2+k-1};\quad y=\frac{k+1}{k^2+k-1}.$$

Подставив найденное значение x и y в третье уравнение, получим следующее уравнение для определения k:

$$-\frac{(1+k)^3}{k^2+k-1}+\frac{(12-k)(k+1)}{k^2+k-1}=-(1+k).$$

Из него найдем $k_1=-1$, $k_2=5$.

148. Решая первые два уравнения, найдем, что $x=4$, $y=-1$, если $m\neq 3$, и любые x и y, удовлетворяющие первому уравнению, если $m=3$. Подставляя $x=4$ и $y=-1$ в третье уравнение, найдем, что для совместности требуется, чтобы $m=3$. Отсюда заключаем, что при $m\neq 3$ система несовместна, а при $m=3$ хотя и совместна, но неопределенна, так как приводится к следующей:

$$\begin{cases}3x+2y=10;\\ 3x+2y=10;\\ 6x+4y=20.\end{cases}$$

149. Не противоречит. Первое справедливо при $c=0$ и любых a и b, а также при $a=1$ и любых b и c, т. е. является уравнением. Второе же справедливо при любых a, b и c и является поэтому тождеством.

150. Из второго уравнения видно, что $y-1=\frac{1}{4}|x+1|\geqslant 0$. Поэтому $|y-1|=y-1$ и система запишется так:

$$\begin{cases}|x+1|+y-1=5;\\ |x+1|=4y-4.\end{cases}$$

Исключая $|x+1|$, получим $4y-4+y-1=5$. Отсюда $y=2$. Подставляя $y=2$ в первое уравнение, найдем $|x+1|=4$. Если $x+1>0$, то получим уравнение $x+1=4$ и из него найдем $x=3$. Если $x+1<0$, то получим уравнение $-x-1=4$ и из него найдем $x=-5$.

Таким образом, система имеет решения: $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=-5$, $y_2=2$.

151. Из второго уравнения видим, что $y-5=|x-1|>0$ и, следовательно, $|y-5|=y-5$. Теперь система запишется так:

$$\begin{cases} |x-1|+y-5=1; \\ |x-1|+5-y=0. \end{cases}$$

Из нее находим $|x-1|=\frac{1}{2}$, т. е. $x-1=\pm\frac{1}{2}$. Отсюда $x_1=\frac{3}{2}$, $y_1=\frac{11}{2}$; $x_2=\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{11}{2}$.

152. Из первого уравнения находим, что $5y=-3|x|-9$, т. е. что $y<0$ и, следовательно, $|y|=-y$. Из второго $-2x=|y|+7$, т. е. $x>0$ и $|x|=x$. Система принимает вид

$$\begin{cases} 3x+5y+9=0; \\ 2x+y-7=0. \end{cases}$$

Решив ее, найдем: $x=\frac{44}{7}$, $y=-\frac{39}{7}$.

153. Данную систему можно записать так:

$$\begin{cases} x-y=\pm 2; \\ \pm x\pm y=4. \end{cases}$$

Во втором уравнении достаточно брать только верхние или только нижние знаки. Решив четыре системы, найдем следующие решения: $x_1=3$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=3$; $x_3=-3$, $y_3=-1$; $x_4=-1$, $y_4=-3$.

154. 1) Пусть $y\geqslant 0$. Тогда $|y|=y$ и второе уравнение будет иметь такой вид: $|x|+y=1$. Найдя из него $y=1-|x|$ и подставив это значение y в первое уравнение, получим $|x+1-|x||=1$. Отсюда $x-|x|=0$, $|x|=x$ и, следовательно, $x\geqslant 0$. Итак, если $y\geqslant 0$, то и $x\geqslant 0$. Система же в этом случае примет такой вид:

$$\begin{cases} x+y=1; \\ x+y=1. \end{cases}$$

2) Пусть $y\leqslant 0$. Рассуждая так же, как в первом случае, докажем, что тогда и $x\leqslant 0$, а система будет иметь вид

$$\begin{cases} x+y=-1; \\ x+y=-1. \end{cases}$$

Таким образом, системе удовлетворяет любая пара неотрицательных чисел, сумма которых равна $+1$, а также любая пара неположительных чисел, сумма которых равна -1.

155. Решив систему, найдем:

$$x=\frac{15n+7}{3n^2+2};\quad y=\frac{7n-10}{3n^2+2}.$$

Так как $3n^2+2>0$, то для того, чтобы было $x>0$, а $y<0$, необходимо и достаточно, чтобы n удовлетворяло неравенствам $15n+7>0$, $7n-10<0$ или $-\frac{7}{15}<n<\frac{10}{7}$. Очевидно, таких значений только два: 0 и 1.

156. Разложим трехчлен x^2-3x+2 на множители. Получим $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Отсюда ясно, что для того, чтобы данный многочлен делился на трехчлен x^2-3x+2, достаточно, чтобы он делился на $x-1$ и на $x-2$. Но по теореме Безу остаток от деления многочлена на двучлен $x-a$ равен значению этого многочлена при $x=a$. Применяя ее к двучленам $x-1$ и $x-2$, получим $1-3+3+a+b$ и $16-24+12+2a+b$. Для того чтобы деление нацело было возможно, необходимо и достаточно, чтобы эти остатки равнялись нулю. Отсюда получаем систему уравнений для определения значений a и b

$$\begin{cases} a+b=-1; \\ 2a+b=-4. \end{cases}$$

Решив ее, найдем $a=-3$, $b=2$.

157. Дискриминант трехчлена x^2-3x+4 равен $3^2-4\cdot4=-7<0$. Следовательно, корни трехчлена комплексные, и применять в этом случае метод, основанный на теореме Безу (см. задачу 156), хотя и можно, не следует, так как он приведет к большим вычислениям. Для решения задачи другим методом будем делить данный многочлен на данный трехчлен по правилам деления многочленов:

$$\begin{array}{r|l} x^4-3x^3+3x^2+ax+b & x^2-3x+4 \\ \cline{2-2} \underline{x^4-3x^3+4x^2} & x^2-1 \\ -x^2+ax+b & \\ \underline{-x^2+3x-4} & \\ (a-3)x+b+4 & \end{array}.$$

Так как в остатке получился многочлен степени более низкой, чем степень делителя, то дальше производить деление невозможно. Чтобы деление многочлена на трехчлен было выполнимо нацело, нужно подобрать значения a и b так, чтобы остаток стал равен нулю. Очевидно, для этого достаточно (да и необходимо) положить $a=3$ и $b=-4$, т. е. потребовать, чтобы коэффициент при x и свободный член остатка обратились бы каждый в нуль,

что приведет к системе $a-3=0$, $b+4=0$. Этим методом можно было бы решить и предыдущую задачу (№ 156).

158. Остаток от деления многочлена на $(x-a)(x-b)$ будет многочленом первой степени. Обозначим его через $mx+n$, а данный многочлен через $f(x)$. Получим тождество.

$$f(x)=(x-a)(x-b)\varphi(x)+mx+n,$$

где $\varphi(x)$ — частное. Положив в равенстве $x=a$ и $x=b$, получим систему для определения m и n

$$\begin{cases} A=ma+n; \\ B=mb+n. \end{cases}$$

Решив ее, найдем, что $m=\dfrac{A-B}{a-b}$; $n=\dfrac{aB-bA}{a-b}$. Отсюда искомый остаток

$$mx+n=\frac{A-B}{a-b}\,x+\frac{aB-bA}{a-b}=A\cdot\frac{x-b}{a-b}+B\cdot\frac{x-a}{b-a}.$$

Впрочем, нетрудно и непосредственно без вычислений сообразить, что остаток будет иметь такой вид, если учесть теорему, сформулированную при решении задачи 29.

159. В этом случае остаток от деления будет многочленом второй степени: mx^2+nx+p. Поэтому, поступая как в задаче 158, найдем систему для определения чисел m, n и p:

$$\begin{cases} A=ma^2+na+p; \\ B=mb^2+nb+p; \\ C=mc^2+nc+p. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно m, n и p и подставив найденные значения m, n и p в остаток mx^2+nx+p, получим после несложных преобразований $mx^2+nx+p=A\cdot\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+$

$$+B\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+C\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Нетрудно и без вычислений сообразить, какой будет вид остатка, особенно если учесть теорему, приведенную в решении задачи 29.

160. Разделив многочлен x^3+px+q на многочлен $x^2-2\alpha x+\alpha^2$, найдем остаток $(p+3\alpha^2)x-2\alpha^3+q$. Так как остаток должен тождественно равняться нулю, то получим уравнения $p+3\alpha^2=0$ и $-2\alpha^3+q=0$. Из первого найдем, что $\alpha^2=-\dfrac{p}{3}$ или $\alpha^6=-\dfrac{p^3}{27}$. Из второго найдем, что $\alpha^3=\dfrac{q}{2}$ или $\alpha^6=\dfrac{q^2}{4}$. Сравнивая эти два

значения α^6, получим следующее соотношение между p и q, которое необходимо должно выполняться для того, чтобы деление рассматриваемых многочленов было возможно: $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=0$.

Значение α проще всего получить, разделив значение α^3 на значение α^2 найденные выше. В результате получим $\alpha=-\frac{3q}{2p}$.

161. Так как старший член данного многочлена есть x^4, то искомый многочлен имеет вид x^2+px+q. Отсюда получим тождество

$$x^4+2x^3+ax^2+2x+b=(x^2+px+q)^2$$

или

$$x^4+2x^3+ax^2+2x+b=x^4+2px^3+\\+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2.$$

Но в равных многочленах равны коэффициенты при одинаковых степенях буквы x. Приравнивая коэффициенты при x^3, взятые из левой и правой частей равенства, затем при x^2 и т. д., получим следующую систему уравнений.

$$2=2p;\ a=p^2+2q;\ 2=2pq;\ b=q^2.$$

Из нее легко находим $p=1$; $q=1$; $a=3$; $b=1$. Искомый многочлен имеет вид x^2+x+1.

162. Освободив равенство от знаменателей, получим тождество

$$(A+B)x^2+(B+C)x+A+C=x+3.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях буквы x, взятые из левой и правой частей этого равенства, придем к системе

$$\begin{cases}A+B=0;\\B+C=1;\\A+C=3.\end{cases}$$

Из нее найдем: $A=1$; $B=-1$; $C=2$.

163. Решив систему трех первых уравнений, получим $x=1$, $y=-1$, $z=3$. Но эта тройка чисел не удовлетворяет четвертому уравнению. Следовательно, данная система несовместна.

Можно поступить иначе. Сложить второе и третье уравнения и из результата вычесть первое. Получится уравнение $8x-8y--2z-10=0$, которое противоречит четвертому.

164. Приравнивая левые части первого и третьего уравнений, найдем

$$\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right);\ (\lambda+\mu)\frac{y}{b}=\mu-\lambda.$$

Если $\lambda+\mu\neq 0$ или, что одно и то же, $\lambda\neq-\mu$, то $y=b\cdot\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}$. Под-

ставляя найденное значение y в первое и второе уравнения, получим систему для определения x и z

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{2\lambda\mu}{\mu+\lambda}, \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{2}{\mu+\lambda}. \end{cases}$$

Складывая, а потом вычитая почленно эти уравнения, найдем:

$$x=a\cdot\frac{\lambda\mu+1}{\mu+\lambda};\quad z=c\cdot\frac{\lambda\mu-1}{\mu+\lambda}.$$

Если подставить найденные значения x, y, z в четвертое уравнение (им мы не пользовались), то получится тождество.

Отсюда вывод: если $\lambda\neq-\mu$, то данная система совместна.

165. $x=-2t$; $y=t$; $z=t$, где t — любое число.

166. $$\frac{x-a}{(a+b+c)(b+c-a)}=\frac{y-b}{(a+b+c)(c+a-b)}=$$

$$=\frac{z-c}{(a+b+c)(a+b-c)}.$$

Сделав сокращения и воспользовавшись свойством равных отношений, получим

$$\frac{x-a}{c+b-a}=\frac{y-b}{a+c-b}=\frac{z-c}{a+b-c}=\frac{(x+y+z)-(a+b+c)}{a+b+c}=$$

$$=\frac{(k-1)(a+b+c)}{a+b+c}=k-1.$$

Отсюда

$$x=a+(k-1)(c+b-a);\ y=b+(k-1)(a+c-b);$$
$$z=c+(k-1)(a+b-c).$$

167. Умножив первое уравнение на $-a^2$, второе — на a, третье — на -1 и сложив полученные уравнения, найдем $[-a^2+a(b+c)-bc]z=-1$, откуда $z=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$. Затем, умножив первое уравнение на $-c^2$, второе — на c, третье — на -1 и сложив полученные результаты, найдем $x=\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}$. Подставляя найденные значения x и y в первое уравнение, получим $y=\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}$.

168. Сложив три уравнения данной системы, получим следующее выводное уравнение: $(a+b+c)(x+y+z)=0$. Так как $a+b+c\neq 0$, то оно приведется к следующему эквивалентному: $x+y+z=0$. Полученное уравнение есть следствие уравнений данной системы, и если мы добавим его к данным трем уравнениям, то новая система из четырех уравнений будет эквивалентна данной. Теперь рассматриваем эту новую систему. Из четвертого уравнения находим $y+z=-x$ и подставляем это значение x в первое уравнение. Получим $-(b+c)x-ax=b-c$, откуда $x=\dfrac{c-b}{a+b+c}$. Аналогично найдем $y=\dfrac{a-c}{a+b+c}$ и $z=\dfrac{b-a}{a+b+c}$.

169. 1) Если $a+b+c\neq 0$ и среди чисел a, b и c есть различные, то система имеет единственное решение $x=y=z=1$. Оно найдется обычным способом исключения неизвестных, рассмотрев, например, первые два уравнения и уравнение $x+y+z=3$, которое получится как следствие уравнений системы, если все три уравнения сложить почленно.

2) Если $a+b+c\neq 0$ и $a=b=c$, то система принимает вид

$$\begin{cases} x+y+z=3; \\ x+y+z=3; \\ x+y+z=3. \end{cases}$$

В этом случае любые три числа x, y и $z=3-x-y$ являются решением системы.

3) Если $a+b+c=0$, но не все числа a, b и c равны нулю (в этом случае любая тройка чисел удовлетворяла бы системе), то, пользуясь равенством $a+b+c=0$, можем привести данную систему к следующей:

$$\begin{cases} ax+by-(a+b)z=0; \\ bx-(a+b)y+az=0; \\ -(a+b)x+ay+bz=0. \end{cases}$$

Из нее видно, что третье уравнение есть следствие первых двух и что любые три числа, равные между собой, будут решением системы.

Замечание. Если бы числа a, b и c могли принимать комплексные значения, то пришлось бы рассмотреть еще один случай. Именно, если бы одновременно было $a+b+c=0$ и $a^2+ab+b^2=0$, то два уравнения данной системы были бы следствием третьего. В этом можно было бы убедиться, например, так. Положив $c=-(a+b)$ в первом уравнении, получим уравнение $ax+by-(a+b)z=0$. Умножив его на b и положив $b^2=-ab-a^2$ и $ab+b^2=-a^2$, получим уравнение $bx-(a+b)y+az=0$, которое совпадает со вторым $(a+b=-c)$. Аналогично можно показать, что и третье уравнение системы есть следствие первого.

В рассматриваемом случае любая тройка чисел, удовлетворяющая уравнению $ax+by+cz=0$, есть решение системы.

170. Так как x, y и z не равны нулю, то система равносильна следующей:

$$\frac{ay+bx}{xy}=\frac{1}{c};\quad \frac{az+cx}{zx}=\frac{1}{b};\quad \frac{bz+cy}{yz}=\frac{1}{a}$$

или

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{1}{c};\quad \frac{a}{x}+\frac{c}{z}=\frac{1}{b};\quad \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{1}{a}.$$

Сложим почленно последние три уравнения. Получим:

$$2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Это уравнение вместе с теми тремя, из которых оно получено, образует систему, эквивалентную данной. Вычитая из четвертого уравнения этой системы третье, найдем $\frac{a}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)$, откуда $x=\frac{2a^2bc}{ac+ab-bc}$. Аналогично получим: $y=\frac{2b^2ca}{ab+bc-ca}$; $z=\frac{2c^2ab}{bc+ca-ab}$.

171. Обозначим равные отношения буквой t. Тогда получим систему

$$\frac{x_1-a_1}{m_1}=\frac{x_2-a_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_p-a_p}{m_p}=t;$$

$$x_1+x_2+\ldots+x_p=a$$

или

$$x_1=a_1+m_1t;\quad x_2=a_2+m_2t;\quad \ldots;$$
$$x_p=a_p+m_pt;\quad x_1+x_2+\ldots+x_p=a.$$

Решение заданной системы и этой суть равносильные задачи. Подставляя значения x_1, x_2, ..., x_p, найденные из первых p уравнений, в последнее, придем к следующей системе:

$$x_1=a_1+m_1t;\ x_2=a_2+m_2t;\ \ldots;\ x_p=a_p+m_pt;$$
$$t(m_1+m_2+\ldots+m_p)=a-a_1-a_2-\ldots-a_p.$$

Введем обозначения: $m_1+m_2+\ldots+m_p=A$ и $a-a_1-a_2-\ldots-a_p=B$. Тогда последнее уравнение примет вид $At=B$. Если $A\neq 0$, то $t=\frac{B}{A}=\frac{a-a_1-a_2-\ldots-a_p}{m_1+m_2+\ldots+m_p}$ и данная система имеет

единственное решение, которое получим, если подставим найденное значение t в формулы $x_1=a_1+m_1t$; $x_2=a_2+m_2t$; ...; $x_p=a_p+m_pt$. Если $A=0$, но $B\neq0$, то уравнение $At=B$ не имеет решений, а следовательно, и система не имеет решений. Если $A=0$ и $B=0$, то уравнение $At=B$ обращается в тождество. Система в этом случае имеет бесконечное множество решений, которые можно получить с помощью формул $x_1=a_1+m_1t$; $x_2=a_2+m_2t$; ...; $x_p=a_p+m_pt$, где t — любое число.

172. Если x_1 и x_2 — корни данного уравнения, то по условию $x_2=x_1^2$, а по теореме Виета $x_1x_1^2=a^3$ и $x_1+x_1^2=\frac{15}{4}$. Отсюда:

$x_1=a$; $a^2+a-\frac{15}{4}=0$; $a_1=\frac{3}{2}$; $a_2=-\frac{5}{2}$.

173. Известно, что если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $a+bi$ $(b\neq0)$, то оно имеет и сопряженный ему корень $a-bi$. Так как $x_1=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=i$, то второй корень искомого квадратного уравнения будет $x_2=-i$. Отсюда, пользуясь теоремой Виета, получим квадратное уравнение $x^2+1=0$.

174. Квадратное уравнение имеет равные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Отсюда получаем уравнение $(5a+2)^2-4(5a-1)(3a-2)=0$ для определения соответствующих значений a. Решаем его: $35a^2-72a+4=0$; $a_1=2$; $a_2=\frac{2}{35}$.

175. Чтобы квадратный трехчлен был полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы он имел равные корни, что будет иметь место в том и только в том случае, когда дискриминант трехчлена равен нулю. Поэтому получаем $[m(m-1)]^2-4\cdot36=0$, $m(m-1)=\pm12$: а) $m^2-m-12=0$; $m_1=4$, $m_2=-3$; б) $m^2-m+12=0$ — дает комплексные значения m.

176. Дискриминант данного уравнения должен равняться нулю. Поэтому имеем $(3+p)^2-4\cdot3(1+p)=0$, $p^2-6p-3=0$. Это и есть искомое уравнение. Заметим, что находить значения p не требуется, так как уравнение уже получено.

177. $(x_1-x_2)^2=16$; $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$;

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16$; $2^2-4q=16$; $4q=-12$; $q=-3$.

178. В уравнения $x_1+x_2=\frac{18m}{9}$ и $x_1x_2=\frac{16-8m}{9}$ подставим $x_1=2x_2$. Получим $3x_2=2m$ и $2x_2^2=\frac{16-8m}{9}$. Сравнение x_2^2, полу-

ченных из этих уравнений, дает $\left(\frac{2}{3}m\right)^2=\frac{8-4m}{9}$. Отсюда находим: $4m^2=8-4m$; $m^2+m-2=0$; $m_1=-2$; $m_2=1$.

179. Чтобы квадратное уравнение имело различные корни, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения был не равен нулю. Поэтому получаем соотношение $1+2m(3m+2)\neq 0$ или $6m^2+4m+1\neq 0$. Но трехчлен $6m^2+4m+1$ имеет комплексные корни, так как его дискриминант отрицательный, и поэтому при любом вещественном m он не равен нулю, а следовательно, при любом вещественном m данное уравнение имеет различные корни.

180. Для этого должно быть $p+q=-p$ и $pq=q$. Из второго уравнения этой системы получаем $q(p-1)=0$. Отсюда или $q=0$, или $p=1$. Но при $q=0$ первое уравнение дает $p=0$, а при $p=1$ из него получаем $q=-2$. Итак, имеем: $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$ и соответствующие им уравнения: а) $x^2=0$; б) $x^2+x-2=0$.

181. Предположим, что уравнения имеют общий корень $x=a$. Тогда должно быть

$$\begin{cases} 2a^2-(3m+2)a+12=0; \\ 4a^2-(9m-2)a+36=0. \end{cases}$$

Умножая первое равенство на два и вычитая из полученного результата второе, найдем $(3m-6)a-12=0$, откуда $a=\frac{4}{m-2}$.

Итак, необходимо, чтобы выполнялось соотношение $a=\frac{4}{m-2}$.

Подставим это значение a в первое уравнение. Получим:

$$2\cdot\frac{16}{(m-2)^2}-\frac{(3m+2)4}{m-2}+12=0;$$

$$8-(3m+2)(m-2)+3(m-2)^2=0;\quad -8m+24=0;\quad m=3.$$

Нетрудно видеть, что при $m=3$ уравнения действительно имеют общий корень $a=4$.

182. Вычисляем дискриминант и преобразовываем его:

$$(2+3m)^2-(1+m)(3+8m)=m^2+m+1=$$

$$=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Последнее же выражение, как сумма положительных величин, есть величина положительная, а в этом и состоит необходимое и достаточное условие вещественности корней квадратного уравнения с вещественными коэффициентами.

183. Для этого достаточно доказать, что дискриминант уравнения неотрицательный, т. е.

$$4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)\geqslant 0.$$

Покажем это:

$$4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)=2(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-$$
$$-2ac)=2[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)]=$$
$$=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0.$$

184. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения, равный $4k+1$, был точным квадратом, т. е. чтобы $4k+1=m^2$, где m — целое число. Отсюда $k=\frac{m^2-1}{4}=$ $=\frac{(m-1)(m+1)}{4}$. Очевидно, оба множителя числителя должны быть четными числами. Пусть $m-1=2n$ и $m+1=2n+2$. Тогда $k=n(n+1)$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

185. Так как p — нечетное, то и дискриминант p^2-4q тоже нечетное число. Поэтому, если есть рациональные корни у уравнения, то должно быть

$$p^2-4q=(2m+1)^2.$$

Положив $p=2k+1$; $q=2l+1$, получим

$$(2k+1)^2-(2m+1)^2=4(2l+1).$$

Преобразуем левую часть:

$$(2k+1)^2-(2m+1)^2=2(k+m+1)2(k-m).$$

Это число делится на 8, потому что числа $k+m+1$ и $k-m$ в сумме дают нечетное число $2k+1$ и, следовательно, одно из них четное. Правая же часть $4(2l+1)$ не делится на 8. Полученное противоречие доказывает теорему.

186. Предположим, что уравнение имеет дробный рациональный корень $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, не имеющие общих множителей, и $|n|\neq 1$. Подставим его в уравнение вместо x. Получим $\frac{m^4}{n^4}+a\cdot\frac{m}{n}+1=0$. Умножим обе части последнего равенства на n. Будем иметь $\frac{m^4}{n^3}+am+n=0$. Но это невозможно, потому что $\frac{m^4}{n^3}$ — несократимая дробь, а $am+n$ — целое число. Предположим, что уравнение имеет целый корень m. Тогда, подставляя в уравнение $x=m$, получим $m^4+am+1=0$. Разделим на m все члены уравнения. Будем иметь $m^3+a+\frac{1}{m}=0$. Но если $m\neq\pm 1$, то это невозможно, потому что m^3+a есть целое число,

а $\frac{1}{m}$ — нецелое. Если же $m=\pm 1$, то $a=\pm 2$, что исключено. Утверждение доказано.

187. Предположим, что уравнение имеет корень $x=\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа и $|q|\neq 1$. Тогда должно быть $\left(\frac{p}{q}\right)^m+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{m-1}+a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{m-2}+\ldots+a_m=0$ или после умножения на q^{m-1}

$$\frac{p^m}{q}+a_1p^{m-1}+a_2p^{m-2}q+\ldots+a_mq^{m-1}=0.$$

Последнее же равенство невозможно, так как первое слагаемое есть нецелое число, а все остальные — целые.

188. Если $x=\frac{p}{q}$ — корень уравнения, то, поступая как в задаче 187, получим следующие два равенства:

$$a_0\frac{p^m}{q}+a_1p^{m-1}+a_2p^{m-2}q+\ldots+a_mq^{m-1}=0;$$

$$a_0p^{m-1}+a_1p^{m-2}q+a_2p^{m-3}q^2+\ldots+a_m\frac{q^m}{p}=0.$$

Так как в левой части первого равенства второе слагаемое и все дальнейшие — целые числа, то и первое слагаемое должно быть целым, иначе равенство невозможно. Поэтому a_0 должно иметь q делителем. Аналогично, с помощью второго равенства, докажем, что p есть делитель a_m.

189. Пусть уравнение имеет вид $P(x)=0$. Выполним деление с остатком многочлена $P(x)$ на произведение $(x-a-b\sqrt{c})(x-a+b\sqrt{c})=(x-a)^2-b^2c$. Обозначим частное через $Q(x)$, а остаток (он будет не выше первой степени относительно x) через $Ax+B$. Тогда получим

$$P(x)=Q(x)[(x-a)^2-b^2c]+Ax+B. \qquad (*)$$

Так как $x=a+b\sqrt{c}$ корень $P(x)$, то, положив в равенстве (*) $x=a+b\sqrt{c}$, получим

$$0=Q(x)\cdot 0+A(a+b\sqrt{c})+B.$$

Но число $A(a+b\sqrt{c})+B$ есть сумма рационального числа $Aa+B$ и иррационального числа $Ab\sqrt{c}$. Поэтому оно может обратиться в нуль в том и только в том случае, когда каждое из них в отдельности равно нулю, т. е. когда $Ab\sqrt{c}=0$ и $Aa+B=0$. Так как по условию $b\neq 0$ и $c\neq 0$, то из первого равенства получим

$A=0$, а из второго $B=0$. Итак, оказывается, что многочлен $P(x)$ делится на $(x-a)^2-b^2c$, а следовательно, и на $x-(a-b\sqrt{c})$. Последнее же означает, что $a-b\sqrt{c}$ есть корень рассматриваемого уравнения.

190. $(6x+7)^2\cdot\frac{1}{12}(6x+8)(6x+6)=6$. Положим $y=6x+7$. Тогда получим: $y^2(y+1)(y-1)=72$, $y^4-y^2-72=0$, $y^2=9$, $y^2=-8$.

Отсюда

а) $(6x+7)^2=9$, $6x+7=\pm 3$; $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{5}{3}$;

б) $(6x+8)^2=-8$, $6x+7=\pm 2\sqrt{2}i$;

$$x_{3,4}=\frac{-7\pm 2\sqrt{2}i}{6}.$$

191. $x^2(1+x)^2+x^2+2x(1+x)x=8(1+x)^2+2x^2(1+x)$,
$[x(1+x)+x]^2=2(1+x)[4(1+x)+x^2]$, $[x(x+2)]^2=$
$=2(1+x)(x+2)^2$, $x^2(x+2)^2-2(1+x)(x+2)^2=0$,
$(x+2)^2(x^2-2x-2)=0$,

$$x_{1,2}=-2,\ x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}.$$

192. $(x^2+x)(x^2+x-2)=24$,
$[(x^2+x-1)+1][(x^2+x-1)-1]=24$,
$(x^2+x-1)^2-1=24$, $(x^2+x-1)^2=25$,
$x^2+x-1=\pm 5$; а) $x^2+x-1=5$, $x^2+x-6=0$; $x_1=2$, $x_2=-3$;
б) $x^2+x-1=-5$, $x^2+x+4=0$;

$$x_{3\,4}=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}.$$

193. $\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]^4+\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^4=1$. Положим $y=x-\frac{5}{2}$. Получим уравнение $\left(y+\frac{1}{2}\right)^4+\left(y-\frac{1}{2}\right)^4=1$. Раскрывая скобки и приводя подобные, придем к уравнению $2y^4+3y^2-\frac{7}{8}=0$. Отсюда $y^2=\frac{1}{4}$; $y^2=-\frac{7}{4}$; $y_1=\frac{1}{2}$; $y_2=-\frac{1}{2}$; $y_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$. Пользуясь равенством $x-\frac{5}{2}=y$, найдем: $x_1=3$; $x_2=2$; $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{7}i}{2}$.

Можно было бы не вводить замены $x-\frac{5}{2}=y$, а преобразовать данное уравнение к следующему квадратному:

$$(x^2-5x)^2+14(x^2-5x)+48=0.$$

Оба указанных метода приложимы к любому уравнению вида

$$(x-a)^4+(x-b)^4=c.$$

194. Пусть один корень будет x, а другой $x_1=2x$. Если подставим в уравнение $2x$ вместо x, то получим уравнение $8x^3-84x^2+280x-300$. Оно, вместе с данным, образует систему, из которой можно найти корень x. Для этого умножим данное уравнение на 2, а найденное уравнение разделим на 4 и из первого результата вычтем второй. Получим $21x^2-210x+525=0$. Отсюда $(x-5)^2=0$, $x=5$, $x_1=10$. Зная два корня кубического уравнения, легко найти третий корень. Для этого можно, например, воспользоваться тем, что сумма всех корней равна коэффициенту при x^2, взятому с противоположным знаком, т. е. $x+x_1+x_3=21$, так что $x_3=6$.

195. Если алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами имеет корни $1+\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$, то оно имеет и корни $1-\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ (задача 189). Поэтому искомое уравнение будет иметь следующий вид:

$$(x-1-\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$$

или после упрощений

$$x^4-6x^3+7x^2+6x-2=0.$$

196. Решив каждое уравнение по формуле квадратного уравнения, найдем, что первое имеет корни 1 и 2, а второе — 2 и —7. Следовательно, система имеет только одно решение $x=2$.

197. Как видно из уравнений данной системы, значения x, y и $x+y$ не равны нулю. Поэтому, разделив первое уравнение на второе и сократив в левой части дробь на $x+y$, получим уравнение $x=2y$, которое является следствием уравнений системы, т. е. уравнением, которое удовлетворяется всеми решениями данной системы. Отсюда следует, что система

$$\begin{cases} x=2y; \\ y^2+xy=3 \end{cases}$$

эквивалентна данной. Подставив $x=2y$ во второе уравнение, найдем $y^2+2y^2=3$ и $y=\pm 1$. Но тогда $x=\pm 2$. Из уравнения $x=2y$ видно, что x и y одного знака. Поэтому решения системы будут такие: $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=-2$, $y_2=-1$.

198. Так как первое уравнение системы приводится к виду

$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=109$, то систему можно записать так:

$$\begin{cases} u^2+v^2=109; \\ u+v=13, \end{cases}$$

где $u=x^2+y^2$ и $v=xy$. Найдя u из второго уравнения, подставляем его значение в первое и решаем: $(13-v)^2+v^2=109$, $v^2-13v+30=0$; $v_1=10$, $v_2=3$; $u_1=3$, $u_2=10$. Поэтому данная система приводится к следующим двум: а) $x^2+y^2=10$, $xy=3$; б) $x^2+y^2=3$, $xy=10$. Решаем первую. Для этого умножаем второе уравнение на 2 и затем один раз складываем с первым, а другой раз вычитаем из первого. В результате получаем систему

$$\begin{cases} (x+y)^2=16; \\ (x-y)^2=4, \end{cases}$$

эквивалентную данной, которая приводится к следующим четырем линейным системам:

$$\begin{cases} x+y=\pm 4; \\ x-y=\pm 2. \end{cases}$$

Решая их, найдем: $x_1=3$, $y_1=1$; $x_2=-3$, $y_2=-1$; $x_3=1$, $y_3=3$; $x_4=-1$, $y_4=-3$.

Вторая система решается аналогично. Ее решения следующие:

$$x_5=\frac{\sqrt{23}+i\sqrt{17}}{2}, \quad y_5=\frac{\sqrt{23}-i\sqrt{17}}{2};$$

$$x_6=\frac{-\sqrt{23}-i\sqrt{17}}{2}, \quad y_6=\frac{-\sqrt{23}+i\sqrt{17}}{2};$$

$$x_7=\frac{\sqrt{23}-i\sqrt{17}}{2}, \quad y_7=\frac{\sqrt{23}+i\sqrt{17}}{2};$$

$$x_8=\frac{-\sqrt{23}+i\sqrt{17}}{2}, \quad y_8=\frac{-\sqrt{23}-i\sqrt{17}}{2}$$

199. $[(x+y)+1]^2+(x+y)^2=25$, $2(x+y)^2+2(x+y)-24=0$,

$$(x+y)^2+(x+y)-12=0; \quad x+y=\frac{-1\pm 7}{2}.$$

Поэтому задача решения данной системы равносильна задаче решения следующих двух систем: а) $x+y=-4$, $x^2-y^2=3$; б) $x+y=3$, $x^2-y^2=3$.

Решаем первую систему: $x+y=-4$; $(x+y)(x-y)=3$. Отсюда $x-y=-\frac{3}{4}$, что вместе с уравнением $x+y=-4$ дает $x_1=-\frac{19}{8}$; $y_1=-\frac{13}{8}$.

Решаем вторую систему: $x+y=3$; $(x+y)(x-y)=3$. Отсюда $x-y=1$, что вместе с уравнением $x+y=3$ дает $x_2=2$; $y_2=1$.

200. Складывая первые два уравнения и вычитая из результата третье, найдем, что $2xy=4$ или $xy=2$. Очевидно, всякое решение данной системы является решением полученного уравнения. Аналогичными преобразованиями получим еще два уравнения $yz=6$ и $xz=3$, которые также являются следствиями уравнений данной системы. Таким образом, система $xy=2$; $yz=6$; $xz=3$ удовлетворяется любым решением данной системы. Обратно, всякое решение новой системы будет решением данной, так как каждое уравнение данной системы можно получить, сложив соответствующие два уравнения новой. Следовательно, система $xy=2$; $yz=6$; $xz=3$ эквивалентна данной. Перемножим все три уравнения новой системы. Получим уравнение $x^2y^2z^2=36$ или $xyz=\pm 6$, которое является следствием уравнений новой системы, и, присовокупив его к уравнениям новой системы, получим следующую систему из четырех уравнений: $xy=2$; $yz=6$; $xz=3$; $xyz=\pm 6$. Она, как и предыдущая, также эквивалентна данной. Решаем эту систему. Подставим в последнее уравнение системы вместо xy число 2. Найдем, что $z=\pm 3$. Аналогично найдем, что $x=\pm 1$ и $y=\pm 2$. Учитывая первые три уравнения, из которых видно, что $xy>0$, $yz>0$, $xz>0$, получим следующие решения данной системы:

$$x_1=1,\ y_1=2,\ z_1=3;\ x_2=-1,\ y_2=-2,\ z_2=-3.$$

201. Возведем в квадрат первое уравнение системы, из результата вычтем второе и третье. Получим уравнение $xy+xz=36$ или $x(y+z)=36$, которое является следствием уравнений данной системы. Присовокупим это уравнение к уравнениям рассматриваемой системы, тогда получим систему из четырех уравнений, равносильную данной. Найдя из четвертого уравнения $y+z=\dfrac{36}{x}$ и подставив это значение $y+z$ в первое уравнение системы, получим $x+\dfrac{36}{x}=13$; $x^2-13x+36=0$; $x_1=4$; $x_2=9$. Используя эти значения x, а также третье и четвертое уравнения системы, найдем для определения y и z следующие две системы:

$$\begin{cases} y+z=9; \\ yz=18 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y+z=4; \\ yz=18. \end{cases}$$

Решение их элементарно, а потому не приводится. Выполнив его, получим следующие решения данной системы:

$$x_1=4,\ y_1=6,\ z_1=3;\ x_2=4,\ y_2=3,\ z_2=6;$$
$$x_3=9,\ y_3=2+i\sqrt{14},\ z_3=2-i\sqrt{14};\ x_4=9,\ y_4=2-i\sqrt{14},\ z_4=2+i\sqrt{14}.$$

202. Умножим первое уравнение на 2, второе — на -1, третье — на -3 и результаты сложим. Получим:

$$2x^2+2y^2+2z^2-3x-2y^2+7xz-3xz+3x=70+14-12;$$
$$2x^2+2z^2+4xz=72;\ x^2+2xz+z^2=36;\ (x+z)^2=36;\ x+z=\pm 6.$$

Если к трем уравнениям данной системы присовокупить один раз уравнение $x+z=6$, а другой — уравнение $x+z=-6$, то получим две системы уравнений, по четыре уравнения в каждой, которые вместе равносильны данной системе. Беря из этих систем третьи и четвертые уравнения, получим две системы для определения x и z: а) $x+z=6$, $x(z-1)=4$; б) $x+z=-6$, $x(z-1)=4$. Решаем первую из них: $z=6-x$; $x(6-x-1)=4$, $x^2-5x+4=0$; $x_1=1$; $x_2=4$, $z_1=5$, $z_2=2$. Вторая система решается аналогично. Из нее найдем:

$$x_{3,4}=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{2};\ z_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}.$$

Исключив произведение xz из второго и третьего уравнений системы, получим $y^2=7+2x$, а отсюда, подставляя x_1, x_2, x_3, x_4 вместо x, найдем: $y_1=\pm 3$; $y_2=\pm\sqrt{15}$; $y_3=\pm\sqrt[4]{33}$; $y_4=\pm i\sqrt[4]{33}$. Таким образом, данная система имеет восемь решений.

203. Возведем в квадрат третье уравнение и из результата вычтем первое и удвоенное второе уравнения системы. Придем к уравнению $4yz=8$ или $yz=2$, которое является следствием уравнений данной системы, и, добавив его к уравнениям данной системы, получим систему, равносильную данной. Подставим вместо yz число 2 во второе уравнение системы и рассмотрим систему из полученного уравнения $xy+xz=9$ и третьего уравнения, т. е. следующую систему:

$$\begin{cases} x(y+z)=9; \\ x+(y+z)=6. \end{cases}$$

Из нее находим: $y+z=6-x$; $x(6-x)=9$; $x^2-6x+9=0$; $x=3$; $y+z=3$. Теперь значения y и z легко определить из системы

$$\begin{cases} y+z=3; \\ yz=2. \end{cases}$$

Решив ее, найдем для y значения 1 и 2, а для z значения 2 и 1.

Итак, $x_1=3$, $y_1=1$, $z_1=2$; $x_2=3$, $y_2=2$, $z_2=1$.

204. Сложим первое уравнение с третьим и из результата вычтем второе. Это даст $2x^2=(a+c-b)xyz$. Отсюда получим $x_1=0$ и $2x=(a+c-b)yz$. Подставив в данную систему $x_1=0$, найдем $y_1=0$, $z_1=0$. Аналогичными преобразованиями получим также уравнения $2y=(b+a-c)zx$ и $2z=(c+b-a)xy$. Если не учитывать нулевое решение, которое уже найдено, то полученная система

$$\begin{cases} 2x=(a+c-b)yz; \\ 2y=(b+a-c)zx; \\ 2z=(c+b-a)xy \end{cases}$$

равносильна данной.

Перемножая первые два равенства этой системы и деля результат на $xy>0$, получим уравнение $(a+c-b)(b+a-c)z^2=4$. Аналогичными преобразованиями получим также $(b+a-c)(c+b-a)x^2=4$ и $(c+b-a)(a+c-b)y^2=4$. Из этих уравнений найдем:

$$x=\frac{\pm 2}{\sqrt{(b+a-c)(c+b-a)}};\quad y=\frac{\pm 2}{\sqrt{(c+b-a)(a+c-b)}}.$$

$$z=\frac{\pm 2}{\sqrt{(a+c-b)(b+a-c)}}.$$

Эти формулы и дадут решения данной системы, однако нужно учесть, что x, y и z, как это видно из данной системы, должны быть все положительны. Таким образом, с учетом решения $x_1=y_1=z_1=0$ система имеет 3 решения.

Условия, наложенные на a, b и c, гарантируют вещественность найденных решений.

205. Сложим все три уравнения системы. Получим после упрощений: $x^2+y^2+2xy=49$; $(x+y)^2=49$ или $x+y=\pm 7$. Умножим второе уравнение на 2 и сложим результат с первым. Получим уравнение $(x+y)^2+2z(x+y)=94+z^2$. Рассмотрим теперь эти два уравнения и первое уравнение данной системы. Они образуют систему

$$\begin{cases} x+y=\pm 7; \\ (x+y)^2+2z(x+y)=94+z^2; \\ x^2+y^2=z^2, \end{cases}$$

которая, как легко доказать, равносильна данной.

Решаем эту новую систему. Подставив $x+y=\pm 7$ во второе уравнение, найдем уравнение для определения z: $49\pm 14z=94+z^2$. Из него находим, что $z_1=9$; $z_2=5$; $z_3=-9$; $z_4=-5$. Подставляя найденные значения z в третье уравнение, получим следующие системы:

$$\begin{cases} x^2+y^2=81; \\ x+y=\pm 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2+y^2=25; \\ x+y=\pm 7. \end{cases}$$

Решения этих систем, приведенные в соответствие с найденными значениями z, дадут следующие 8 решений данной системы:

$$x_1=4,\ y_1=3,\ z_1=5;\ x_2=3,\ y_2=4,\ z_2=5;$$
$$x_3=-4,\ y_3=-3,\ z_3=-5;\ x_4=-3,\ y_4=-4,\ z_4=-5;$$

$$x_5=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\quad y_5=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\quad z_5=9;$$

$$x_6=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\quad y_6=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\quad z_6=9;$$

$$x_7=\frac{-7-\sqrt{113}}{2},\quad y_7=\frac{-7+\sqrt{113}}{2},\quad z_7=-9;$$

$$x_8=\frac{-7+\sqrt{113}}{2},\quad y_8=\frac{-7-\sqrt{113}}{2},\quad z_8=-9.$$

206. Сложим три уравнения данной системы. Получим уравнение $(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2$. Данная система вместе с этим уравнением образует систему, эквивалентную данной. Подставляя в первое уравнение значение $x+y+z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, найдем

$$x=\frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Аналогично получим:

$$y=\frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\quad z=\frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Из уравнений системы видно, что x, y и z должны быть одного знака. Следовательно, во всех полученных формулах нужно брать одинаковые знаки — или только знаки плюс, или только знаки минус. Таким сбразом, решений будет два.

207. Прибавив по единице к обеим частям каждого уравнения системы и сделав несложные преобразования, придем к следующей системе, равносильной данной:

$$\begin{cases}(1+y)(1+z)=a+1;\\(1+z)(1+x)=b+1;\\(1+x)(1+y)=c+1.\end{cases}\qquad (*)$$

Перемножив первые два уравнения этой системы и разделив результат на третье, получим $(1+z)^2=\dfrac{(a+1)(b+1)}{c+1}$ или $z=$

$$=\pm\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}-1.$$

Аналогично найдем

$$y=\pm\sqrt{\frac{(c+1)(a+1)}{b+1}}-1 \text{ и } x=\pm\sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}-1.$$

Из системы (*) видно, что знаки перед корнями нужно взять или все верхние, или все нижние, так что получится два решения.

208. Перенеся вторые слагаемые из правых частей уравнений в левые и преобразовав получившиеся после этого разности квадратов, придем к следующей системе, равносильной данной:

$$\begin{cases} (x+y-z)(x+z-y)=a; \\ (y+z-x)(y+x-z)=b; \\ (z+x-y)(z+y-x)=c. \end{cases} \qquad (*)$$

Перемножив первые два уравнения этой системы и разделив это произведение на третье уравнение, получим $(x+y-z)^2=\frac{ab}{c}$ или $x+y-z=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$. Аналогично найдем еще два уравнения и составим систему

$$\begin{cases} x+y-z=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}; \\ y+z-x=\pm\sqrt{\frac{bc}{a}}; \\ z+x-y=\pm\sqrt{\frac{ca}{b}}. \end{cases} \qquad (**)$$

Система (**) будет равносильна системе (*), а следовательно, и данной, если знаки перед радикалами в правых частях всех уравнений брать одинаковые. Это можно усмотреть из системы (*).

Сложив два первых уравнения системы (**) и разделив на 2, получим

$$y=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}\pm\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

и аналогично

$$z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right);\quad x=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

209. Как видно из системы, ни одно из неизвестных не может равняться нулю. На самом деле, если бы, например, $x=0$, то тогда $yz=0$ и $x^2+y^2+z^2=0$. Но это невозможно, так как в этом случае было бы $x=y=z=0$ и отношения, входящие в систему, не имели бы числового смысла. Поэтому система будет равносильна той, которая получится из нее, если заменить все отношения обратными величинами. Эта система имеет вид

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Заметим, что ни одно из чисел a, b, c не равно нулю. Действи-

тельно, если $a=0$, то из последней системы получим $\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+$ $+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}$, откуда следует $b=0$ и $c=0$. Но этого не может быть, так как отношения в данной системе не имеют смысла в этом случае.

Сложим все уравнения новой системы, а затем вычтем из полученной суммы поочередно ее первое уравнение, второе и третье. Получим следующую систему, равносильную данной:

$$\frac{c}{z}=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$$

или

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t,$$

где $t\neq 0$.

Из последних равенств находим: $x=at$; $y=bt$; $z=ct$ и, подставляя в равенство $\frac{b}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$, получим: $\frac{b}{bt}=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2+c^2)t^2}$; $\frac{1}{t}=\frac{1}{2t^2}$; $t=\frac{1}{2}$. Таким образом, единственное решение будет:

$$x=\frac{a}{2};\quad y=\frac{b}{2};\quad z=\frac{c}{2}.$$

210. Перепишем данную систему так:

$$\begin{cases} z=-(x+y); \\ (x+y)^2-2xy=z^2+20; \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2=z^4+560. \end{cases}$$

Подставляя значение $x+y=-z$ из первого уравнения во второе, получим $z^2-2xy=z^2+20$, $-2xy=20$, $xy=-10$. Подставляем в третье уравнение $x^2+y^2=z^2+20$, полученное из второго уравнения, а также $xy=-10$. Это даст: $(z^2+20)^2-2\cdot(-10)^2=z^4+$ $+560$; $z^4+40z^2+400-200=z^4+560$; $40z^2=360$; $z=\pm 3$. Для определения x и y имеем систему

$$\begin{cases} x+y=\pm 3; \\ xy=-10. \end{cases}$$

Решив ее и учитывая значения $z=\pm 3$, получим 4 решения данной системы:

$$x_1=5,\ y_1=-2,\ z_1=-3;\ x_2=-2,\ y_2=5,\ z_2=-3;$$
$$x_3=-5,\ y_3=2,\ z_3=3;\ x_4=2,\ y_4=-5,\ z_4=3.$$

211. Из первого уравнения находим $y=2x-1$ и подставляем во второе. Получаем:

$$4x+2x-1-2x(2x-1)-z^2=3;\ 4x^2-8x+4+z^2=0;$$
$$4(x-1)^2+z^2=0.$$

Последнему уравнению удовлетворяют лишь $x=1$, $z=0$ (корни должны быть вещественными). Но тогда $y=1$. Итак, система имеет единственное решение: $x=1$; $y=1$; $z=0$.

212—243. Указание. В элементарной математике при решении иррациональных уравнений и их систем корни четной степени считаются арифметическими. За значение корня нечетной степени из вещественного числа принимается его единственное вещественное значение. Основной метод решения иррационального уравнения состоит в исключении радикалов путем возведения обеих частей уравнения в некоторую степень с таким расчетом, чтобы после этого уравнение перестало быть иррациональным. Иногда такую операцию нужно повторить. В поле вещественных чисел этот метод может привести к уравнению, неравносильному данному, а следовательно, и к посторонним решениям. Поэтому при решении таких уравнений методом исключения радикалов необходима проверка (испытание) найденных значений путем подстановки их в данное уравнение и те из них, которые не будут ему удовлетворять, нужно отбросить как посторонние. Возведение обеих частей уравнения в нечетную степень приводит к равносильному уравнению и в этом случае проверку производить не нужно. Все сказанное о решении иррациональных уравнений нужно отнести к решению систем таких уравнений.

212. В первом уравнении должно быть $P(x)\geqslant 0$ и $Q(x)\geqslant 0$, а во втором они могут быть какими угодно. Поэтому в общем случае уравнения не равносильны.

213—214. В первом уравнении должно быть $P(x)Q(x)\geqslant 0$. Во втором — $P(x)\geqslant 0$ и $Q(x)\geqslant 0$. Поэтому в общем случае уравнения не равносильны (см. задачу 124).

215. Так как левая часть больше двух, то уравнение не имеет решений.

216. $\dfrac{(x^2-3x+2)-(x^2-7x+12)}{+\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-7x+12}}=\sqrt{2}$, $\sqrt{x^2-3x+2}+$

$$+\sqrt{x^2-7x+12}=\sqrt{2},\ (\sqrt{x^2-3x+2})^2=(\sqrt{2}-\sqrt{x^2-7x+12})^2,$$

$$x^2-3x+2=2-2\sqrt{2x^2-14x+24}+x^2-7x+12,\ \sqrt{2x^2-14x+24}=$$
$$=6-2x,\ 2x^2-14x+24=36-24x+4x^2,\ 2x^2-10x+12=0,$$
$$x^2-5x+6=0;\ x_1=2,\ x_2=3.$$

Оба корня удовлетворяют уравнению, что легко устанавливается проверкой. *

* В тексте мы, как правило, проверку корней не приводим, а лишь указываем, какие из найденных корней посторонние.

217. $2x^2+6-3(x+1)-2\sqrt{2x^2-3x+2}=0,$

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0.$$

Положим

$$\sqrt{2x^2-3x+2}=y.$$

Тогда получим:

$$y^2-2y+1=0,\ y=1;\ \sqrt{2x^2-3x+2}=1,\ 2x^2-3x+2=1,$$

$$2x^2-3x+1=0;\ x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}.$$

218. $\sqrt[5]{(7x-3)^3}-\dfrac{8}{\sqrt[5]{(7x-3)^3}}=7.$

Положим

$$\sqrt[5]{(7x-3)^3}=y.$$

Тогда будем иметь:

$$y^2-7y-8=0;\ y_1=-1,\ y_2=8.$$

а) $\sqrt[5]{(7x-3)^3}=-1,\ 7x-3=-1,\ x_1=\frac{2}{7};$

б) $\sqrt[5]{(7x-3)^3}=8,\ 7x-3=32,\ x_2=5.$

219. $\sqrt{\dfrac{x+9}{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{\dfrac{x+9}{x}}}=4.$

Положим

$$\sqrt{\frac{x+9}{x}}=y.$$

Тогда получим:

$$y+\frac{4}{y}=4,\quad y^2-4y+4=0;\quad y=2,\quad \sqrt{\frac{x+9}{x}}=2,$$

$$\frac{x+9}{x}=4,\ x+9=4x,\ x=3.$$

220. Разделим все члены уравнения на $(a-x)^{\frac{2}{3}}$. Получим следующее уравнение, эквивалентное данному: $\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{2}{3}}-$

$-5\cdot\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}+4=0.$ Решаем это уравнение относительно

$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}$ как квадратное: $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{5\pm3}{2}$. Отсюда:

а) $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=1$, $\frac{a+x}{a-x}=1$, $a+x=a-x$, $x_1=0$;

б) $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=4$, $\frac{a+x}{a-x}=64$, $a+x=64a-64x$, $x_2=\frac{63}{65}a$.

Найденные значения x проверять не требуется.

221. Обозначим $\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}=y$. Тогда уравнение приведется к следующему равносильному: $y+\frac{1}{y}=2$ или $y^2-2y+1=0$. Отсюда:

$$y=1,\quad \sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}=1,\quad \frac{a-x}{b+x}=1,\quad a-x=b+x,\quad x=\frac{a-b}{2}.$$

222. $\sqrt[3]{x+45}=1+\sqrt[3]{x-16}$, $(\sqrt[3]{x+45})^3=(1+\sqrt[3]{x-16})^3$, $x+45=$
$=1+3\sqrt[3]{x-16}+3(\sqrt[3]{x-16})^2+x-16$, $(\sqrt[3]{x-16})^2+\sqrt[3]{x-16}-20=0$;

$$\sqrt[3]{x-16}=\frac{-1\pm9}{2};$$

а) $\sqrt[3]{x-16}=4$, $x-16=64$, $x_1=80$;

б) $\sqrt[3]{x-16}=-5$, $x-16=-125$, $x_2=-109$.

223. Из уравнения видно, что допустимыми значениями x являются лишь те, которые удовлетворяют системе неравенств: $x-\frac{1}{x}\geqslant0$, $1-\frac{1}{x}\geqslant0$, что приводит к соотношениям $x\geqslant1$ или $-1\leqslant x<0$. Поэтому $\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ — арифметический, а $\frac{x-1}{x}=$
$=\sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}$ и данное уравнение равносильно такому:

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}$$

или

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}\left(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)=0.$$ Отсюда:

а) $\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0,\quad \frac{x-1}{x}=0,\quad x_1=1;$

б) $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{\frac{x-1}{x}},\quad (\sqrt{x+1}-1)^2=\frac{x-1}{x},$

$x+1-2\sqrt{x+1}+1=\frac{x-1}{x},\ x^2-2x\sqrt{x+1}+x+1=0,\ (x-\sqrt{x+1})^2=0,$

$x-\sqrt{x+1}=0,\ x=\sqrt{x+1},\ x^2=x+1,\ x^2-x-1=0,$

$$x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Значение $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ также корень данного уравнения.

224. Уравнение не имеет решения, так как $\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}<$

$<\sqrt{1+x}<\sqrt{2+x}.$

225. $[4x+1+2x\sqrt{2(2x^2+1)}]^2=[-(2x+1)\sqrt{4x^2+4x+3}]^2,$

$(4x+1)^2+4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}+8x^2(2x^2+1)=$

$=(2x+1)^2(4x^2+4x+3),\ (4x+1)^2+4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}+$
$+16x^4+8x^2=(4x^2+4x+1)(4x^2+4x+3),\ (4x+1)^2+$

$+4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}+16x^4+8x^2=(4x+1)(4x^2+4x+3)+$

$+16x^4+16x^3+12x^2,\ (4x+1)^2+4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}=$
$=(4x+1)(4x^2+4x+3)+4x^2(4x+1),$

$4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}=(4x+1)(4x^2+4x+3+4x^2-4x-1),$

$4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}=(4x+1)(8x^2+2).$ Отсюда: а) $1+4x=0$ и $x=-\frac{1}{4}$; б) $2x\sqrt{4x^2+2}=4x^2+1,\ 4x^2(4x^2+2)=(4x^2+1)^2$

$$16x^4+8x^2=16x^4+8x^2+1.$$

Последнее равенство невозможно.

Итак, уравнение имеет единственное решение $x=-\frac{1}{4}$.

226. $\left(2\sqrt{2x+\sqrt{x}}-3\sqrt{\frac{x}{2x+\sqrt{x}}}\right)^2=\left(2\sqrt{2x-\sqrt{x}}\right)^2$,

$4(2x+\sqrt{x})-12\sqrt{x}+\frac{9x}{2x+\sqrt{x}}=4(2x-\sqrt{x})$, $\frac{9x}{2x+\sqrt{x}}=4\sqrt{x}$.

Так как $x\neq 0$, то, сократив на $\sqrt{x}$, получим уравнение $\frac{9}{2\sqrt{x}+1}=4$.

Отсюда $8\sqrt{x}+4=9$, $\sqrt{x}=\frac{5}{8}$, $x=\frac{25}{64}$.

227. Возведем в куб обе части уравнения и воспользуемся формулой $(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$. Получим: $\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\right.$ $\left.+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\right)^3=(\sqrt[3]{b})^3$, $a+\sqrt{x}+3\sqrt[3]{(a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})}\sqrt[3]{b}+a-\sqrt{x}=b$,

$2a+3\sqrt[3]{a^2-x}\sqrt[3]{b}=b$.

Из преобразованного уравнения видно, что если $b=0$, но $a\neq 0$, то уравнение не имеет решения. Если же $a=b=0$, то уравнение удовлетворяется тождественно, а так как допустимыми значениями для неизвестного ввиду наличия в данном уравнении $\sqrt{x}$ являются лишь значения $x\geqslant 0$, то в этом случае решениями будут все неотрицательные числа.

Пусть теперь $b\neq 0$. Тогда найдем: $3\sqrt[3]{a^2-x}\sqrt[3]{b}=b-2a$,

$\sqrt[3]{a^2-x}=\frac{b-2a}{3\sqrt[3]{b}}$, $a^2-x=\frac{(b-2a)^3}{27b}$, $x=a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}$ (*).

Возведение уравнения в куб приводит к уравнению, эквивалентному данному в области вещественных чисел. Таким образом, при $b\neq 0$ последнее уравнение и данное имеют одни и те же корни в области допустимых значений для неизвестного первого уравнения, т. е. при условии $x\geqslant 0$.

Поэтому, если $a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}\geqslant 0$, то уравнение имеет единственное решение, выражаемое формулой (*). Если же a^2- $-\frac{(b-2a)^3}{27b}<0$, то уравнение не имеет решения. Например, при $a=0$, но $b\neq 0$, формула (*) даст $x=-\frac{b^2}{27}<0$, выходящее из области допустимых значений.

228. Поступая так же, как в задаче 227, получим:

$$x+3\sqrt[3]{x(2x-3)}\sqrt[3]{12(x-1)}+2x-3=12(x-1),$$

$$x-1+\sqrt[3]{x(2x-3)12(x-1)}=4(x-1),\ \sqrt[3]{12x(x-1)(2x-3)}=$$
$$=3(x-1),\ 12x(x-1)(2x-3)=27(x-1)^3,\ (x-1)[4x(2x-3)-$$
$$-9(x-1)^2]=0,\ (x-1)(-x^2+6x-9)=0,\ (x-1)(x-3)^2=0;$$
$$x_1=1,\quad x_2=3.$$

Так как уравнение было возведено в нечетную степень, то полученное в результате этой операции новое уравнение эквивалентно данному и найденные значения x в проверке не нуждаются.

229. Положим $\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}=u$, $\sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=v$. Тогда уравнение примет вид $u+v=2$. Возведем его в пятую степень. Получим:

$$(u+v)^5=32,\ u^5+v^5+5uv(u^3+v^3)+10u^2v^2(u+v)=32,$$
$$u^5+v^5+5uv(u+v)(u^2-uv+v^2)+10u^2v^2(u+v)=32,$$
$$u^5+v^5+5uv[(u+v)^2-3uv](u+v)+10u^2v^2(u+v)=32.$$

Подставляя сюда $u+v=2$ и $u^5+v^5=(16+\sqrt{x})+(16-\sqrt{x})=32$, найдем:

$32+5uv(2^2-3uv)\cdot 2+10u^2v^2\cdot 2=32,\ 4uv-u^2v^2=0,\ uv(4-uv)=0.$

Отсюда

а) $u=0,\ \sqrt[5]{16+\sqrt{x}}=0,\ 16+\sqrt{x}=0,$

что невозможно;

б) $v=0,\ \sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=0,\ 16-\sqrt{x}=0,\ x=256$

(это значение x является корнем данного уравнения);

в) $4-uv=0,\ uv=4.$

Решая систему

$$uv=4,\quad u+v=2,$$

получим:

$$u(2-u)=4,\ u^2-2u+4=0,\ u=1\pm i\sqrt{3},$$

в то время как

$$\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}=u$$

должно быть вещественным числом.

230. Положим $\sqrt{x-4}=y\geqslant 0$. Тогда $x=y^2+4$ и уравнение можно записать так:

$$\sqrt{y^2-2y+1}+\sqrt{y^2-4y+4}=1$$

или $\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{(y-2)^2}=1$, или, наконец, $|y-1|+|y-2|=1$. Если

$y \leqslant 1$, то $|y-1|=1-y$, $|y-2|=2-y$ и уравнение примет вид $1-y+2-y=1$. Отсюда $2y=2$, $y=1$. Если $1<y<2$, то $|y-1|=y-1$, $|y-2|=2-y$ и уравнение приведется к такому: $y-1+2-y=1$. Но это значит, что y может быть любым. При $y \geqslant 2$ будем иметь $|y-1|=y-1$, $|y-2|=y-2$, а данное уравнение запишется так: $y-1+y-2=1$. Из него находим, что $y=2$. Итак, должно быть: $1 \leqslant y \leqslant 2$; $1 \leqslant \sqrt{x-4} \leqslant 2$; $1 \leqslant x-4 \leqslant 4$; $5 \leqslant x \leqslant 8$.

Уравнение имеет бесконечное множество решений.

231. $\dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})^2}{(x+2)-(x-2)}=\dfrac{x}{2}$, $x+2-2\sqrt{x^2-4}+x-2=2x$,

$\sqrt{x^2-4}=0$, $x^2-4=0$; $x_1=2$, $x_2=-2$.

Первое значение x является корнем данного уравнения. Второе должно быть отброшено, так как $x=-2$ не принадлежит области допустимых значений $(x-2=-4<0)$.

232. Допустимыми значениями для неизвестного этого уравнения являются $x \geqslant 0$. Умножим числитель и знаменатель левой части уравнения на 2 и воспользуемся формулами квадрата разности и квадрата суммы двух количеств:

$$\frac{2(1+x-\sqrt{2x+x^2})}{2(1+x+\sqrt{2x+x^2})}=\frac{2+x-2\sqrt{2+x}\sqrt{x}+x}{2+x+2\sqrt{2+x}\sqrt{x}+x}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})^2}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^2=a^3\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$$

или

$$\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^3=a^3.$$

Извлекаем корни из обеих частей уравнения. Это даст

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}=a. \qquad (*)$$

Заметим, что все примененные сейчас операции при переходе от данного уравнения к уравнению (*), включая операцию извлечения кубического корня, не могут привести к потере корней или к приобретению посторонних. Таким образом, уравнение (*) рав-

носительно данному уравнению. Так как корни должны быть арифметическими, то из полученного равенства следуют неравенства $0<a\leqslant 1$. Действительно, числитель и знаменатель левой части уравнения — положительные числа, причем числитель не больше знаменателя.

Освобождая уравнение (*) от знаменателя, получим новое уравнение, которое также равносильно данному: $\sqrt{2+x}(1-a)=$ $=\sqrt{x}(1+a)$. Так как $a\leqslant 1$, то обе части последнего уравнения неотрицательны и возведение его в квадрат снова приведет к уравнению, равносильному данному. Таким образом, задача свелась к решению следующего уравнения: $(2+x)(1-a)^2=$ $=x(1+a)^2$. Решаем его: $x[(1+a)^2-(1-a)^2]=2(1-a)^2$, $4ax=$ $=2(1-a)^2$, $x=\dfrac{(1-a)^2}{2a}$.

Итак, уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{(1-a)^2}{2a}$, если $0<a\leqslant 1$, и не имеет решения, если $a\leqslant 0$.

Замечание. В данном случае отпала надобность в испытании найденного значения неизвестного, хотя при решении уравнения применялась операция возведения уравнения в квадрат, которая, вообще говоря, приводит к посторонним корням. Объясняется это тем, что при тех ограничениях, которые мы попутно налагали на неизвестное ($x\geqslant 0$) и на параметр ($0<a\leqslant 1$), все производившиеся операции приводили к уравнениям, равносильным данному. Надо сказать, что при решении иррациональных уравнений с буквенными коэффициентами такой путь обычно оказывается более удобным, чем тот, при котором мы обязаны производить испытание найденных значений неизвестного, так как в последнем случае приходится решать еще задачу на преобразование буквенного выражения, иногда довольно сложного.

233. Так как корень предполагается арифметическим, то должно выполняться условие: $\dfrac{1+bx}{1-bx}>0$; $(1+bx)(1-bx)>0$; $1-b^2x^2>0$; $x^2<\dfrac{1}{b^2}$. Так как арифметический корень есть число неотрицательное (а в данном случае он может быть лишь положительным), то необходимо (но не достаточно), чтобы было $\dfrac{1-ax}{1+ax}>0$; $(1-ax)(1+ax)>0$; $1-a^2x^2>0$; $x^2<\dfrac{1}{a^2}$ *. Если эти

* За исключением $x=0$, для которого a может быть любым.

условия не выполнены, то уравнение не имеет решения. Предполагая это выполненным, мы будем иметь в обеих частях равенства положительные величины и возведение его в квадрат приведет к следующему уравнению, равносильному данному:

$$\left(\frac{1-ax}{1+ax}\right)^2 \cdot \frac{1+bx}{1-bx} = 1.$$

Решая это рациональное алгебраическое уравнение, получим:

$$(1-ax)^2(1+bx) = (1+ax)^2(1-bx),\ a^2bx^3 = (2a-b)x;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{2a-b}{a^2b}},\ x_3 = -\sqrt{\frac{2a-b}{a^2b}}.$$

Очевидно, первый корень удовлетворяет уравнению. Что касается x_2 и x_3, то, для того чтобы они были корнями уравнения, должны выполняться следующие условия: $\frac{2a-b}{a^2} \geqslant 0$ (решения должны быть вещественными), $x^2 < \frac{1}{a^2}$ (в противном случае уравнение вообще не имеет решения, так как левая часть его будет отрицательной, а правая положительной), $x^2 < \frac{1}{b^2}$ (корень, входящий в левую часть уравнения, должен быть вещественным). Если эти условия будут выполнены, то найденные значения x дадут корни данного уравнения. Упростим эти условия. Из первого соотношения получаем:

$$\frac{2a-b}{a^2b} \geqslant 0,\ \frac{2a-b}{b} \geqslant 0,\ \frac{2a}{b} - 1 \geqslant 0,\ \frac{2a}{b} \geqslant 1,\ \frac{a}{b} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Из сопоставления первого и второго получаем:

$$x^2 = \frac{2a-b}{a^2b} < \frac{1}{a^2},\ \frac{2a-b}{b} < 1,\ \frac{2a}{b} - 1 < 1,\ \frac{2a}{b} < 2,\ \frac{a}{b} < 1,$$

или, сведя два результата в один,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} < 1.$$

Что касается условия $x^2 < \frac{1}{b^2}$, то оно выполняется. Действительно,

$$x^2 - \frac{1}{b^2} = \frac{2a-b}{a^2b} - \frac{1}{b^2} = \frac{2ab-b^2-a^2}{a^2b^2} = -\frac{(a-b)^2}{a^2b^2} < 0,$$

так как $a \neq b$.

234. Если n — четное, то допустимые значения x должны удовлетворять условиям $x>0$ и $a+x>0$. При нечетном n эти ограничения на x налагать не требуется. Числа a, b и x, очевидно, не равны нулю.

В левой части равенства вынесем за скобки $\sqrt[n]{a+x}$. Получаем $\sqrt[n]{a+x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}$. Отсюда $\sqrt[n]{a+x}\cdot\frac{a+x}{ax}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}$; $\sqrt[n]{\left(\frac{a+x}{x}\right)^{n+1}}=\frac{a}{b}$. Здесь левая часть больше нуля, следовательно, и правая часть должна быть больше нуля, т. е. a и b удовлетворяют неравенству $\frac{a}{b}>0$. Далее: $\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{n+1}{n}}=\frac{a}{b}$, $\frac{a+x}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}$, $\frac{a}{x}+1=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}$, $\frac{a}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1$, $a=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\right]x$. Если $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\neq 0$, т. е. если $a\neq b$, то отсюда найдем $x=\dfrac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}$ (*). При нечетном n формула (*) всегда даст решение данного уравнения при условии, что a и b одного знака и $a\neq b$. Кроме того, эта формула даст решение при n нечетном и в том случае, если в знаменателе дроби перед выражением $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ поставить знак минус. При четном n, кроме $ab>0$ и $a\neq b$, должно быть $x>0$ и $a+x>0$. Из формулы (*) видно, что x будет положительным, если: а) $a>0$ и $\frac{a}{b}>1$, что приводит к соотношениям $a>b>0$; или б) $a<0$ и $0<\frac{a}{b}<1$, что приводит к соотношениям $0>a>b$. Что касается $a+x$, то эта сумма всегда будет положительна при положительном x, так как $a+x=x\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}$.

Итак, формула (*) при четном n дает единственное решение, если $a>b>0$ или $0>a>b$. При иных соотношениях между a и b уравнение не имеет решения.

235. Если n нечетное число, то n^2 также нечетное число, и при $x<0$ корень степени $n+1$ из $x^n a^{n^2}$ даст мнимую величину. Поэтому при нечетном n допустимыми значениями неизвестного будут $x\geqslant 0$. При n четном допустимыми значениями неизвестного x, очевидно, будут все вещественные числа. Параметр b в обоих случаях есть величина положительная, так как b равняется сумме двух арифметических корней, из которых, по крайней мере, один не обращается в нуль. При решении будем считать сперва n нечетным и, следовательно, $x\geqslant 0$. В левой части данного уравнения вынесем за знак первого радикала $x^{\frac{n}{n+1}}$, а за знак второго $a^{\frac{n}{n+1}}$. Получим:

$$x^{\frac{n}{n+1}}\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}}\sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}}=b,$$

$$\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}}\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)=b,$$

$$\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}=b,\quad x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}},$$

$$x^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}},\quad x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}},$$

при этом, как видно из предпоследнего равенства, должно быть $b\geqslant a$, иначе найденный x не будет решением данного уравнения.

Из этого решения видно, что если n будет четным, то решений будет два:

$$x_{1,2}=\pm\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

при $b>a$ и одно $x=0$, если $a=b$.

236. Так как $n>k>0$, то уравнение имеет корень $x_1=0$. Теперь можем считать, что $x\neq 0$. Разделим все члены уравнения на $\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}$. Получим квадратное уравнение

$$\sqrt{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{n}}-2\sqrt{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}}+\sqrt{a}=0.$$

Решив его, найдем:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{}}=\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}},\ \frac{x}{a}=\left(\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}}\right)^{\frac{2n}{n-2k}},$$

$$x_{2,3}=(\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}\cdot a^{\frac{2k}{2k-n}}.$$

Однако при $n=2k$ вычисления теряют смысл. Но $x=0$ остается корнем и в этом случае. Других же корней при $n=2k$ уравнение иметь не будет, так как в этом случае уравнение приводится к виду $2\sqrt{ax}=2\sqrt{bx}$, причем по условию $a\neq b$. В заключение отметим, что, как видно из правой части данного уравнения, допустимыми значениями для неизвестного являются лишь $x\geqslant 0$. Это было использовано и при вычислениях. Условие $b>a$ гарантирует вещественность x_2 и x_3.

237. Если n нечетное число, то допустимыми значениями x являются все вещественные числа, а при n четном — лишь те, для которых выполняется неравенство $|x|\geqslant 1$.

Разделим обе части неравенства на $\sqrt[n]{(x-1)^2}$ $(x\neq 1)$. Получим:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2+1=4\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}},\ \left(\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2-4\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}+1=0.$$

Решив его как квадратное относительно $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}$, придем к уравнению $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}=2\pm\sqrt{3}$. Оно равносильно данному при дополнительном условии $|x|>1$ в случае n четного. Так как $2\pm\sqrt{3}>0$, то возведение его в степень n приведет к уравнению $\frac{x+1}{x-1}=(2\pm\pm\sqrt{3})^n$, которое также равносильно данному. Решив последнее, найдем $x_{1,2}=\frac{(2\pm\sqrt{3})^n+1}{(2\pm\sqrt{3})^n-1}$, где в числителе и знаменателе нужно перед $\sqrt{3}$ брать одинаковые знаки. Оба эти корня являются корнями данного уравнения как при n четном, так и при n нечетном, так как, очевидно, $|x_1|>1$ и $|x_2|>1$.

238. Умножим обе части уравнения на $\sqrt[n]{\frac{a+x}{x^2}}$. Получим:

$$\frac{1}{x^2}\sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}-\frac{1}{a^2}\sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}=1,\quad \sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}\cdot\frac{a^2-x^2}{a^2x^2}=1,$$

$$\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{\frac{n+1}{n}}=a^2,\quad \frac{a^2-x^2}{x^2}=a^{\frac{2n}{n+1}},\quad a^2=\left(1+a^{\frac{2n}{n+1}}\right)x^2,$$

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}}}. \qquad (*)$$

Оба найденные значения x будут корнями данного уравнения, правда, в случае четного n не при всяких значениях a. Чтобы в этом убедиться, выясним, при каких условиях сделанные здесь преобразования будут приводить к уравнениям, равносильным данному, и покажем, что эти условия выполнены. Будем сперва считать n четным. Так как в этом случае все корни должны быть арифметическими, то, как видно из уравнения, должно быть $a-x\geqslant 0$, $a+x>0$ или $x\leqslant a$ и $x>-a$. Следовательно, $-a<x\leqslant a$ и $a>0$. При этих условиях все произведенные операции (умножение корней, деление корней и т. д.) обратимы, т. е. их можно провести в обратном порядке, а это гарантирует равносильность исходных и получаемых равенств. Таким образом, данное уравнение равносильно уравнению $x=\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}}}$, однако при условии $-a<x\leqslant a$ или $|x|<a$. Но это условие выполнено, так как $\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}}>1$.

Если n нечетное, то, как не трудно видеть, уравнение (*) также будет равносильно данному, но нет оснований требовать, чтобы было $a>0$. Достаточно, чтобы $a\neq 0$.

239. $\sqrt{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}-\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)=\sqrt[2n]{x}$,

$$\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[n]{a},\quad \left(\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}\right)^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{1}{n}},$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}=a^{\frac{2}{3}n},\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{x}}-1=a^{\frac{2}{3}n},\quad \sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{x}\left(1+a^{\frac{2}{3}n}\right),$$

$$a=x\left[1+a^{\frac{2}{3}n}\right]^n,\quad x=a:\left[1+a^{\frac{2}{3}n}\right]^n.$$

Рассуждая так же, как в задаче 238, докажем, что это значение x есть единственный корень данного уравнения.

240. Так как $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{|x+y|}$, то первое уравнение данной системы эквивалентно следующему уравнению: $x-y+\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{|x+y|}=\frac{20}{x+y}$. Если $|x+y|=x+y$, т. е. если $x+y>0$, то система эквивалентна такой: $x^2+y^2+\sqrt{x^2-y^2}-20=0$; $x^2+y^2=34$. Положим $\sqrt{x^2-y^2}=z>0$. Тогда первое уравнение примет вид $z^2+z-20=0$ и из него найдем $z_1=4$; $z_2=-5$. Но $z_2=-5$, как отрицательное, нужно отбросить, а тогда система приведется к следующей, эквивалентной данной:

$$\sqrt{x^2-y^2}=4;\ x^2+y^2=34 \text{ или } x^2-y^2=16;\ x^2+y^2=34.$$

Решив ее, получим $x=\pm 5$; $y=\pm 3$. Из них только $x_1=5$; $y_1=3$ и $x_2=5$; $y_2=-3$ являются решениями данной системы, а $x=-5$; $y=\pm 3$ нужно отбросить, так как при этих значениях $x+y<0$.

Если $x+y<0$, то, аналогично решая, найдем: $x_{3,4}=-\sqrt{\frac{59}{2}}$; $y_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{9}{2}}$.

241. Выполнив сокращение в первом уравнении, разделив на $\sqrt[3]{xy}$ и положив $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=z$, найдем: $z+1+\frac{1}{z}=\frac{7}{2}$ или $2z^2-5z+2=0$. Решив его, получим $z_1=2$; $z_2=\frac{1}{2}$. Таким образом, задача решения данной системы равносильна задаче решения следующих двух систем:

$$\text{а)}\ \sqrt[3]{x}=2\sqrt[3]{y};\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3$$

и

$$\text{б)}\ \sqrt[3]{x}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{y};\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3.$$

Решаем первую. Для этого подставляем значение $\sqrt[3]{x}$ из первого уравнения во второе. Получаем: $2\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{y}=3$; $\sqrt[3]{y}=3$; $y_1=27$; $x_1=8y_1=216$.

Так же решаем вторую систему: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{y}=3$; $\sqrt[3]{y}=-6$; $y_2=-216$; $x_2=\frac{1}{8}y_2=-27$.

242. В левой части первого уравнения уничтожаем иррациональность в знаменателе. Тогда данная система приводится к следующей эквивалентной: $\sqrt{x}=\frac{3}{16}y$; $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$. Подставляем значение $\sqrt{x}$ из первого уравнения во второе: $\frac{3}{16}y+\sqrt{y}=7$; $3y+16\sqrt{y}-112=0$; $\sqrt{y}=\frac{-8\pm20}{3}$. Так как $\sqrt{y}$ — арифметический, то для него получаем только одно значение $\sqrt{y}=4$. Отсюда $y=16$; $x=9$.

243. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=(2\sqrt{xy})^2$; $x+y-2\sqrt{xy}=4xy$ и на основании второго уравнения $20-2\sqrt{xy}=4xy$; $2xy+\sqrt{xy}-10=0$. Отсюда $\sqrt{xy}=\frac{-1\pm9}{4}$; $\sqrt{xy}=2$; $xy=4$. Равенство $\sqrt{xy}=-\frac{5}{2}$ — невозможное, так как $\sqrt{xy}$ — арифметический. Итак, получаем систему $x+y=20$; $xy=4$, которая является следствием данной системы и потому удовлетворяется любым решением данной системы, если оно существует. Решаем ее: $y=20-x$; $x(20-x)=4$; $x^2-20x+4=0$; $x=10\pm4\sqrt{6}$; $y=10\mp4\sqrt{6}$. Но $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}>0$. Поэтому $x>y$ (равенства быть не может) и из найденных значений нужно взять только следующие два: $x=10+4\sqrt{6}$; $y=10-4\sqrt{6}$. Испытание x и y показывает, что они удовлетворяют системе. Однако, несмотря на возведение в квадрат уравнения, проверку можно было бы и не производить, так как здесь выполняются условия $x>0$, $y>0$, $x>y$, которые гарантируют обратимость указанной операции.

III.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

244. Пусть расстояние от деревни до станции x *км*. Если бы турист шел все время со скоростью 3 *км/час*, то он потратил бы на путь $\frac{x}{3}$ *час*, что на $\frac{2}{3}$ *час* больше, чем было в его распоряжении. Таким образом, чтобы поспеть точно к отходу поезда, он должен был затратить времени $\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)$ *час*. В действительности же он лишь первый час шел со скоростью 3 *км/час*, а затем со скоростью 4 *км/час*, что в общем составило $\left(1+\frac{x-3}{4}\right)$ *час*.

Так как он пришел за $\frac{3}{4}$ *час* до отхода поезда, то отсюда получаем уравнение

$$\frac{x}{3}-\frac{2}{3}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{3}{4}.$$

Решаем его:

$$4x-8=12+3x;\ x=20.$$

245. Обозначим число десятков искомого числа буквой x, тогда число запишется так: $10x+3$. Число, получающееся перемещением влево цифры 3, имеет вид $300+x$. Поэтому получим уравнение $300+x=3(10x+3)+1$. Решив его, получим $x=10$, а искомое число 103.

246. Обозначим расстояние, которое пролетел самолет, через x *км*. Со скоростью 220 *км/час* он пролетел часть пути, большую половины на $\frac{385}{2}$ *км*, т. е. равную $\frac{x+385}{2}$ *км*, затратив на нее $\frac{x+385}{2\cdot 220}$ *час*. Остальную часть пути, а именно $\frac{x-385}{2}$ *км*, он пролетел со скоростью 330 *км/час*, затратив на нее $\frac{x-385}{2\cdot 330}$ *час*. Учитывая, что средняя скорость на всем пути равна 250 *км/час*, можем подсчитать все время полета. Оно равно $\frac{x}{250}$ *час*. Отсюда получаем уравнение $\frac{x+385}{2\cdot 220}+\frac{x-385}{2\cdot 330}=\frac{x}{250}$. Решив его, найдем, что $x=1375$.

247. Обозначим число лет младшего через x, а старшего через $x+y$. Тогда для x и y получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=2(x-y); \\ x+y+x+2y=63. \end{cases}$$

Решив ее, найдем: $x=21$; $x+y=28$.

248. Пусть скорость третьей машины будет x *км/час*, а число часов, за которое эта машина догнала вторую, равно y. К тому моменту, когда третья машина догнала вторую, первая машина прошла путь $50(y+0{,}5)$ *км*, вторая $40(y+0{,}5)$ *км*, третья xy *км*. К этому моменту третья и вторая машины прошли одинаковые расстояния, что приводит к уравнению $40(y+0{,}5)=xy$, а первая удалилась от второй и третьей на число километров, равное $50(y+0{,}5)-40(y+0{,}5)=10y+5$. Так как третья машина проходит этот путь за 1,5 *час*, а в час пробегает на $(x-50)$ *км* больше первой, то получаем уравнение $10y+5=1{,}5(x-50)$ или $3x-20y-160=0$.

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} 40(y+0{,}5)=xy; \\ 3x-20y-160=0. \end{cases}$$

Решив ее, найдем, что $x=60$.

249. Пусть скорость пассажирского поезда есть x *км/час*, а скорого y *км/час*. Так как по условию $y=2x$, то пассажирскому поезду требуется на пробег от A до C столько же времени, сколько скорому — на пробег от A до C и обратно. Но пассажирский поезд выходит из A на $\frac{25}{x}$ *час* раньше, чем скорый из C, и поэтому он, несмотря на пятиминутную остановку в B, приходит в C на $\frac{3}{4}$ *час* раньше скорого. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{25}{x}=\frac{3}{4}+\frac{5}{60}.$$

Решив его, найдем $x=30$. Тогда $y=60$, а $BC=120$ *км*. Определим теперь AB.

Пассажирский поезд шел от B до встречи со скорым 14 *мин* и прошел за это время $\frac{14}{60}\cdot 30=7$ (*км*). Следовательно, скорый поезд прошел с момента выхода из C до момента встречи с пассажирским 120 *км*—7 *км*=113 *км*, затратив на этот путь $\frac{113}{60}$ *час*. Пассажирский же поезд, после того как он отошел от A на 25 *км*, был в пути до момента встречи со скорым на 5 *мин* меньше этого времени, т. е. $\frac{113}{60}$ *час*—$\frac{5}{60}$ *час*=$\frac{108}{60}$ *час*=$\frac{27}{15}$ *час*. За это время он прошел $30\cdot\frac{27}{15}=54$ (*км*), причем 7 *км* из них за пункт B. Следовательно, $AB=72$ *км* (25+54—7).

250. Обозначим количество денег, бывшее до перекладывания в 1-й, 2-й, ..., n-й кучках, соответственно через x_1, x_2, ..., x_n, а количество денег в последней кучке, оказавшихся в ней после перекладывания из (n-1-й) кучки, но до перекладывания из нее в первую, через y. После перекладывания из первой кучки во вторую в первой осталось количество денег, равное $\frac{n-1}{n}x_1$, а после перекладывания из n-й кучки в первую в первой их стало $\frac{n-1}{n}x_1+\frac{1}{n}y$, а в последней $\frac{n-1}{n}y$. После первого перекладывания во второй кучке стало количество денег, равное x_2+

$+\frac{1}{n}x_1$, а после того, как из второй кучки переложили в третью, во второй их оказалось $\frac{n-1}{n}\left(x_2+\frac{1}{n}x_1\right)$. Подобными же рассуждениями докажем, что в третьей кучке в результате всех перекладываний количество денег стало $\frac{n-1}{n}\left[x_3+\frac{1}{n}\left(x_2+\frac{1}{n}x_1\right)\right]$ и т. д. Так как в результате перекладываний во всех кучках стало по A руб., то отсюда приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{n-1}{n}x_1+\frac{1}{n}y=A; \\ \frac{n-1}{n}\left(x_2+\frac{1}{n}x_1\right)=A; \\ \frac{n-1}{n}\left[x_3+\frac{1}{n}\left(x_2+\frac{1}{n}x_1\right)\right]=A; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{n-1}{n}y=A. \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем y и, подставив его значение в первое уравнение, определим x_1. После этого найти x_2, x_3, ..., x_n не составит большого труда. В результате получим:

$$x_1=\frac{n(n-2)}{(n-1)^2}A; \quad x_2=\frac{n^2-2n+2}{(n-1)^2}A;$$

$$x_3=x_4=\ldots=x_n=A.$$

251. Пусть один рабочий может выполнить работу в x дней, а другой в y дней. Каждый из них отдельно выполняет в день часть работы, равную соответственно $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$, а работая вместе — $\frac{1}{12}$ часть. Отсюда уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$. За 8 дней совместной работы они выполнили $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ всей работы, и другому пришлось еще работать 5 дней, чтобы закончить ее. Отсюда получаем второе уравнение $\frac{2}{3}+\frac{5}{y}=1$. Итак, имеем систему

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}; \quad \frac{2}{3}+\frac{5}{y}=1.$$

Решив ее, найдем $x=60$; $y=15$.

252. Пусть одна бригада выполняет работу в x дней, а другая в y дней. Тогда первая в один день выполнит $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а вторая $\frac{1}{y}$. Так как, работая вместе 8 дней, они выполняют всю работу, то получаем следующее уравнение: $\frac{8}{x}+\frac{8}{y}=1$. Но $\frac{2}{3}$ первой бригады выполняют в день лишь $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$ всей работы, а 0,8 второй — $\frac{0,8}{y}$. Чтобы выполнить всю работу таким составом рабочих, нужно $11\frac{1}{4}$ дня. Отсюда получаем второе уравнение $11\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+11\frac{1}{4}\cdot\frac{0,8}{y}=1$. Решив систему двух полученных уравнений, найдем, что $x=12$; $y=24$.

253. Пусть количества лет старшего, среднего и младшего братьев в настоящее время выражаются числами x, y и z. Если учесть, что $(x-y)$ лет тому назад младшему было 10 лет, то получим уравнение $z-(x-y)=10$. Через $(x-y)$ лет младшему будет 26 лет. Поэтому можно написать, что $z+(x-y)=26$. В день рождения младшего старшему было $(x-z)$ лет, среднему $(y-z)$ лет, а сумма лет была $2z$. Таким образом, получаем третье уравнение $x-z+y-z=2z$. Решив систему этих трех уравнений, получим $x=40$; $y=32$; $z=18$.

254. Обозначим число частей первого сплава и число частей второго сплава, которые нужно взять, чтобы получить третий сплав, через x и y. Тогда в новом сплаве первого металла будет $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y$, а второго $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y$. Так как отношение количеств этих металлов в новом сплаве равно 17:27, то получим уравнение

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y\right):\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right)=17:27$$

или $(5z+6):(10z+9)=17:27$, где $z=\frac{x}{y}$. Решив это уравнение, найдем, что $z=\frac{9}{35}$, т. е. первого сплава нужно взять 9 частей, а второго 35.

255. Обозначим искомое расстояние, выраженное в километрах, через x, а скорость поезда через y *км/час*. Первый поезд шел

до вынужденной остановки 6 *час* и прошел за это время путь $6y$ *км*. Остальную часть пути $(x-6y)$ *км* он прошел со скоростью $1{,}2y$ *км/час*, затратив на прохождение ее $\frac{x-6y}{1{,}2y}$ *час*. Всего поезд был в пути, с учетом вынужденной двухчасовой стоянки, число часов, равное $6+2+\frac{x-6y}{1{,}2y}$. Это число часов на 1 больше числа часов, положенного по расписанию и равного $\frac{x}{y}$. Отсюда получаем уравнение

$$6+2+\frac{x-6y}{1{,}2y}=\frac{x}{y}+1.$$

Аналогично рассуждая относительно второго поезда, получим второе уравнение

$$6+\frac{150}{y}+2+\frac{x-6y-150}{1{,}2y}=\frac{x}{y}+1{,}5.$$

Решив систему этих двух уравнений, получим $x=600$.

256. Обозначим скорость лодки в стоячей воде, рассчитанную на час, через v_1, скорость течения на участке BC через v_2, расстояние AC через S и расстояние AB через x. S и x выражены в одних и тех же единицах длины, в скоростях v_1 и v_2 употреблены те же единицы длины.

Лодочник на движение вниз по реке тратит 3 *час*, причем часть этого времени, равная $\frac{x}{v_1}$ *час*, тратится на прохождение пути AB, а другая, равная $\frac{S-x}{v_1+v_2}$ *час*, на прохождение пути BC. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{x}{v_1}+\frac{S-x}{v_1+v_2}=3.$$

При движении вверх по реке лодочник тратит на прохождение пути BC уже $\frac{S-x}{v_1-v_2}$ *час*, на прохождение пути AB—прежнее время, т. е. $\frac{x}{v_1}$ *час*, а на весь путь AC—3,5 *час*. Отсюда получаем второе уравнение

$$\frac{x}{v_1}+\frac{S-x}{v_1-v_2}=3{,}5.$$

Если бы на всем пути AC скорость течения реки была такая же, как и на участке BC, то при движении вниз по реке потре-

бовалось бы на прохождение пути AC $\frac{S}{v_1+v_2}$ *час*. Так как по условию это число часов равно $2\frac{3}{4}$, то получаем третье уравнение

$$\frac{S}{v_1+v_2}=2\frac{3}{4}.$$

После некоторых упрощений полученных уравнений придем к системе

$$\begin{cases} xv_2+Sv_1=3v_1(v_1+v_2); \\ -2xv_2+2Sv_1=7v_1(v_1-v_2); \\ 4S=11(v_1+v_2). \end{cases} \qquad (*)$$

Умножив первое уравнение на 2 и сложив полученное уравнение со вторым, найдем $4Sv_1=v_1(13v_1-v_2)$. Разделив его на $v_1\neq 0$ и вычитая из результата третье уравнение системы (*), найдем $2v_1-12v_2=0$ или $v_1=6v_2$. Подставив $v_1=6v_2$ в третье уравнение системы (*), получим $v_2=\frac{4S}{77}$.

Таким образом, имеем: $v_2=\frac{4S}{77}$; $v_1=\frac{24S}{77}$; $v_1-v_2=\frac{20S}{77}$.

Отсюда искомое время $t=\frac{S}{v_1-v_2}=\frac{S}{\frac{20S}{77}}=\frac{77}{20}$ *час*$=3$ *час* 51 *мин*.

257. Обозначим искомое число процентов через x. В конце первого года на книжке стало $\left(1640+\frac{1640}{100}x\right)$ руб. Но с книжки было снято 882 руб., и поэтому на следующий год осталась сумма $1640+\frac{1640}{100}x-882=758+\frac{1640}{100}x$. К этой сумме прибавилась в конце второго года процентная сумма $\left(758+\right.$ $\left.+\frac{1640}{100}x\right)\frac{x}{100}$, после чего на книжке снова оказалось 882 руб. Отсюда получаем уравнение $758+\frac{1640}{100}x+\left(758+\frac{1640}{100}x\right)\frac{x}{100}=$ $=882$ или $41x^2+5995x-31\,000=0$. Решив его, найдем $x=5$.

258. Обозначим число часов работы второго рабочего через x. Первый рабочий начал работу на 2 *час* 16 *мин* раньше второго, а окончил лишь на 16 *мин* раньше его. Значит, первый работал $(x+2)$ *час*. Второй работал после перерыва 8 *час* 10 *мин*$-$ -1 *час* 30 *мин*$=6$ *час* 40 *мин*$=6\frac{2}{3}$ *час*, а до перерыва

$\left(x-6\frac{2}{3}\right)$ *час*. Так как второй за x *час* выполняет половину всей работы (вторую половину выполняет первый), то в час он выполняет $\frac{1}{2x}$ часть работы, а всего до полудня $\frac{x-6\frac{2}{3}}{2x}$. Первый работал после перерыва 7 *час* 54 *мин*—1 *час* 30 *мин*=6 *час* 24 *мин*=$6\frac{2}{5}$ *час*, а до перерыва $\left(x+2-6\frac{2}{5}\right)$ *час*. Так как первый за час выполняет часть работы, равную $\frac{1}{2(x+2)}$, то до наступления полудня он выполняет часть работы, равную $\frac{x+2-6\frac{2}{5}}{2(x+2)}$. Но вместе первый и второй сделали до наступления полудня 0,4 всей работы. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{x-6\frac{2}{3}}{2x}+\frac{x+2-6\frac{2}{5}}{2(x+2)}=0{,}4.$$

После упрощений получаем: $9x^2-80x-100=0$; $x=\frac{40\pm 50}{9}$; $x=10$ (отрицательный корень отбрасываем, как не удовлетворяющий условию задачи). Следовательно, второй работал до полудня 10 *час*—$6\frac{2}{3}$ *час*=3 *час* 20 *мин* и поэтому начал работать в 8 *час* 40 *мин*. Первый начал работать в 6 *час* 24 *мин*.

259. Пусть второй каменщик может выполнить работу в течение x дней. Тогда первому понадобится на нее $(x+9)$ дней. За один день первый выполнит часть работы, равную $\frac{1}{x+9}$, второй — равную $\frac{1}{x}$, а вместе — равную $\frac{1}{20}$. Поэтому получаем уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{20}$ или $x^2-31x-180=0$. Из него находим, что $x=36$. Итак, первый может выполнить работу в 45 дней, а второй в 36.

260. Обозначим искомый путь в километрах через x. Пешеход, вышедший из A, перешел середину пути и прошел от нее к B еще 3 *км*, а пешеход, вышедший из B, не дошел 3 *км* до середины пути. Таким образом, к моменту встречи первый прошел $\left(\frac{x}{2}+3\right)$ *км*, а второй $\left(\frac{x}{2}-3\right)$ *км*. В дальнейшем первый про-

ходит путь $\left(\frac{x}{2}-3\right)$ *км* за 4,5 *час* и, следовательно, движется со скоростью $\left(\frac{x}{2}-3\right):4{,}5$ *км/час*, а второй со скоростью $\left(\frac{x}{2}+3\right):8$ *км/час*, потому что проходит путь $\left(\frac{x}{2}+3\right)$ *км* за 8 *час*. Зная скорость равномерного движения пешеходов и пройденный каждым из них путь до встречи, подсчитаем время, затраченное каждым на движение от момента выхода до встречи. Для первого пешехода это будет

$$\left(\frac{x}{2}+3\right):\left[\left(\frac{x}{2}-3\right):4{,}5\right] \text{ час},$$

а для второго

$$\left(\frac{x}{2}-3\right):\left[\left(\frac{x}{2}+3\right):8\right].$$

Так как это время одинаково, то отсюда получаем уравнение

$$\left(\frac{x}{2}+3\right):\left[\left(\frac{x}{2}-3\right):4{,}5\right]=\left(\frac{x}{2}-3\right):\left[\left(\frac{x}{2}+3\right):8\right].$$

Решаем его:

$$\left(\frac{x}{2}+3\right)^2\cdot\frac{9}{2}=\left(\frac{x}{2}-3\right)^2\cdot 8,$$

$$\left(\frac{x}{2}+3\right)\cdot 3=\pm\left(\frac{x}{2}-3\right)\cdot 4,\quad 3x+18=\pm(4x-24);$$

$$x_1=42,\ x_2=\frac{6}{7}.$$

Второй корень не удовлетворяет условию задачи (путь между M и N больше 6 *км* и тем более больше $\frac{6}{7}$ *км*). Итак, $MN=42$ *км*.

261. Пусть скорость одного автомобиля будет x *км/час*. После встречи он движется еще 2 *час* и, следовательно, проходит после встречи $2x$ *км*. Другой автомобиль проходит после встречи $(210-2x)$ *км*, и так как он на это затрачивает $\frac{9}{8}$ *час*, то скорость его равна $(210-2x):\frac{9}{8}$. Выезжают автомобили одновременно и поэтому затрачивают одинаковое время на движение до встречи. Вычисляя его для первого и второго автомобиля и приравнивая найденные значения, получим уравнение $\frac{210-2x}{x}=\frac{2x}{(210-2x):\frac{9}{8}}$. Решаем его: $(210-2x)^2=\frac{9}{4}x^2$,

$210-2x=\pm\frac{3}{2}x$, $x_1=60$, $x_2=420$. Так как путь имеет длину 210 *км*, то второй корень должен быть отброшен, потому что в этом случае часть пути $2x$ оказалась бы больше всего пути. Итак, скорость одного автомобиля равна 60 *км/час*, а другого $(210-120):\frac{9}{8}=80$ *км/час*.

262. Пусть пшеничной муки было взято x *кг*. Тогда ржаной было взято $(x+10)$ *кг*. Припек на пшеничную муку составил $\frac{x^2}{100}$, а на ржаную $\frac{(x+10)^2}{100}$. Сумма килограммов той и другой муки вместе с припеками составляет 112,5 *кг*. Отсюда: $x+\frac{x^2}{100}+x+10+\frac{(x+10)^2}{100}=112{,}5$; $x^2+110x-5075=0$; $x=-55\pm90$; $x_1=35$; $x_2=-145$. Отрицательный корень отбрасываем. Итак, пшеничной муки было взято 35 *кг*, а ржаной $35+10=45$ *кг*.

263. Если обозначим скорость паровоза на первом участке x *км/час*, то время, затраченное им на прохождение первого участка, будет равно $\frac{24}{x}$ *час*. Второй участок был пройден паровозом со скоростью $(x+4)$ *км/час* и времени при этом было затрачено $\frac{39}{x+4}$ *час*. Но второй участок паровоз прошел за время, которое на 20 *мин*, т. е. на $\frac{1}{3}$ *час*, больше времени, потраченного на прохождение первого участка, и поэтому имеем уравнение $\frac{39}{x+4}-\frac{24}{x}=\frac{1}{3}$, которое приводится к такому виду: $x^2-41x+288=0$. Решив его, найдем корни $x_1=32$ и $x_2=9$. Оба эти корня удовлетворяют условиям задачи.

264. Пусть одно тело проходит в секунду x *м*. Тогда другое тело будет проходить в секунду $(x+4)$ *м*. Первое пройдет окружность за $\frac{360}{x}$ *сек*, а второе за $\frac{360}{x+4}$. Но второе тратит на этот путь на одну секунду меньше первого, и поэтому можно написать уравнение $\frac{360}{x}-\frac{360}{x+4}=1$. Решаем его: $360(x+4)-360x=x(x+4)$, $1440=x^2+4x$, $x^2+4x-1440=0$; $x=36$, $x+4=40$.

265. Пусть длина окружности переднего колеса будет x *м*. Тогда окружность заднего будет $2x$ *м*. После увеличения длины окружности переднего колеса на 1 *м* и уменьшения длины окруж-

ности заднего на 1 *м* переднее сделает $\frac{60}{x+1}$ оборотов на пути в 60 *м*, а заднее $\frac{60}{2x-1}$. Так как заднее при этом сделает на 30 оборотов больше переднего, то получим уравнение $\frac{2}{2x-1} - \frac{2}{x+1} = 1$, которое приводится после упрощений к такому: $2x^2+3x-5=0$. Из двух его корней $x_1=1$ и $x_2=-\frac{5}{2}$ только первый удовлетворяет условиям задачи. Итак, длина окружности переднего колеса равна 1 *м*, а заднего 2 *м*.

266. Пусть искомое время, выраженное в часах, будет x. Действительная скорость трамвая на пути в 30 *км* есть $\frac{30}{x}$ *км/час*, а после уменьшения времени пробега на 0,5 *час* она стала равной $\frac{30}{x-0,5}$ *км/час*. По условию вторая скорость на 3 *км/час* больше первой, и поэтому можно написать $\frac{30}{x}+3=\frac{30}{x-0,5}$ или $2x^2-x-10=0$. Решив его, найдем, что время, затрачиваемое трамваем на рейс, равно 2,5 *час*, а скорость движения равна 12 *км/час*.

267. Пусть плотников было x человек. Тогда маляров было $x-2$, а всего рабочих $2x-2$. Общее число рублей, уплаченное рабочим, составило $3(2x-2)+26$, а так как бригады маляров и плотников получили поровну, то на долю плотника пришлось $\frac{3(2x-2)+26}{2x}$ руб., а на долю маляра $\frac{3(2x-2)+26}{2(x-2)}$ руб. Но последняя сумма на 1 руб. больше первой, что приводит к уравнению $\frac{3(2x-2)+26}{2x}+1=\frac{3(2x-2)+26}{2(x-2)}$. Произведя упрощения, получим уравнение $x^2-8x-20=0$. Отсюда $x=10$; $x-2=8$.

268. Пусть скорость товарного поезда есть x *км/час*. При такой скорости ему нужно $\frac{650}{x}$ *час*, чтобы пройти расстояние от Москвы до Ленинграда. Пассажирский поезд, имеющий скорость $(x+24)$ *км/час*, проходит это расстояние за $\frac{650}{x+24}$ *час*, затрачивая при этом на 12 *час* меньше товарного. Поэтому справедливо уравнение $\frac{650}{x}-\frac{650}{x+24}=12$. Упростив его, получим $x^2+24x-1300=0$. Отсюда: $x=26$; $x+24=50$.

269. Если длина шага ученика младшего класса равна x *м*, то на расстоянии 400 *м* он сделает $\frac{400}{x}$ шагов. Ученик же старшего класса, имея длину шага на 0,3 *м* больше, сделает на этом расстоянии только $\frac{400}{x+0{,}3}$ шагов. Но второй делает на 300 шагов меньше первого, и поэтому справедливо уравнение $\frac{400}{x} - \frac{400}{x+0{,}3} = 300$. Выполнив упрощения, приведем уравнение к виду $10x^2+3x-4=0$. Отсюда: $x=0{,}5$; $x+0{,}3=0{,}8$.

270. Если в куске было x *м*, то покупная цена метра равна $\frac{200}{x}$ руб., а продажная $\left(\frac{200}{x}+1{,}5\right)$ руб. Так как продано было лишь $(x-5)$ *м* и выручена при этом сумма в 190 руб., то можно написать уравнение $\left(\frac{200}{x}+1{,}5\right)(x-5)=190$, которое после упрощений приводится к следующему: $3x^2+5x-2000=0$. Отсюда $x=25$.

271. Если первого сорта было куплено x *кг*, то цена одного килограмма этого сорта будет $\frac{22{,}5}{x}$ руб. Второго сорта было куплено $(x+15)$ *кг*, и, следовательно, цена одного килограмма его будет $\frac{32}{x+15}$ руб. Но первая цена на 10 коп. выше второй, что приводит к уравнению $\frac{32}{x+15}+0{,}1=\frac{22{,}5}{x}$. После упрощения получим $x^2+110x-3375=0$. Отсюда: $x=25$; $x+15=40$.

272. Обозначим искомое число процентов через x. Тогда при первом повышении зарплата в 100 руб. повысится на x руб. и составит сумму $(100+x)$ руб., а при повторном повышении увеличится на $\frac{100+x}{100}\cdot x$ руб. и составит сумму $\left(100+x+\frac{100+x}{100}\cdot x\right)$ руб., которая равна 125,44 руб. Отсюда $100+x+\frac{100+x}{100}\cdot x=125{,}44$. После упрощений получим $x^2+200x-2544=0$. Из него найдем, что $x=12$.

273. Если первый раз было отлито x *л* спирта, то после этого в сосуде осталось $(20-x)$ *л*. Но так как сосуд был долит водой, то в одном литре смеси уже содержалось только $\frac{20-x}{20}$ *л* спирта. Поэтому в x *л* отлитой смеси содержалось чистого спирта лишь $\frac{20-x}{20}\cdot x$ *л*. В результате двух отливаний в сосуде осталось спир-

та $20-x-\frac{20-x}{20}x$. Но это составляет $\frac{1}{4}$ первоначального, т. е. 5 *л*. Таким образом, приходим к уравнению $20-x-\frac{20-x}{20}\cdot x=5$. После упрощения его получаем уравнение $x^2-40x+300=0$, решив которое найдем $x=10$.

274. Обозначим буквой x число монет, уместившихся в стороне квадрата. Очевидно, на всей площади квадрата их разместится x^2. При размещении монет в виде правильного треугольника число монет в основании треугольника будет $x+2$, в следующем ряду $x+1$, затем x и т. д. и, наконец, одна монета. Поэтому получим уравнение $(x+2)+(x+1)+\ldots+2+1=x^2$. Оно приводится к виду $\frac{(x+3)(x+2)}{2}=x^2$ или $x^2-5x-6=0$. Отсюда найдем, что $x=6$, число монет $x^2=36$, а сумма денег — 72 коп.

275. Пусть искомое число участников было x. Полностью сыграли друг с другом по партии лишь $(x-2)$ участников (двое выбыли) и число этих партий равно $(x-3)+(x-4)+\ldots+2+1=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$. Если выбывшие участники турнира между собой играли, то различных партий, сыгранных ими, будет не 6, а 5 и в этом случае будем иметь уравнение $\frac{(x-2)(x-3)}{2}+5=84$. Если же выбывшие участники не играли друг с другом, то все 6 партий, сыгранных ими, будут различными, а потому уравнение для определения x будет такое: $\frac{(x-2)(x-3)}{2}+6=84$. Первое уравнение приводится к такому: $x^2-5x-152=0$ и оно не имеет рациональных решений. Второе уравнение имеет вид $x^2-5x-150=0$. Его корень $x=15$ дает решение задачи. Итак, число участников было 15, причем двое выбывших не играли между собой.

276. Пусть стоимость материи первого сорта есть x руб. Тогда его стоимость после повышения на y процентов составит $x+\frac{xy}{100}$, что приводит к уравнению $x+\frac{xy}{100}=15$. Первоначальная стоимость материи второго сорта равна $(15{,}2-x)$ руб., а после понижения на y процентов $\left(15{,}2-x-\frac{15{,}2-x}{100}y\right)$ руб. Но эта новая стоимость равна 2 р. 40 к. Поэтому можно написать, что $15{,}2-x-\frac{15{,}2-x}{100}y=2{,}4$. Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x+\dfrac{xy}{100}=15; \\ 15{,}2-x-\dfrac{15{,}2-x}{100}y=2{,}4. \end{cases}$$

Исключив из нее y, получим уравнение $2x^2-43x+228=0$. Из него найдем: $x_1=12$; $x_2=9{,}5$.

277. Пусть поезда встретились в некоторой точке пути C (рис. 1). Обозначим число часов, затраченное товарным поездом на прохождение пути TC, через x, а его скорость через y *км/час*. Время в часах, затраченное пассажирским поездом на прохождение пути BC, будет равно $x-5\frac{1}{12}$. Обозначим скорость пассажирского поезда через z *км/час*. Очевидно, можно написать, что $TC=xy$ и $TC=4\frac{1}{10}z$. Отсюда получаем уравнение $xy=4\frac{1}{10}z$. Аналогично $BC=\left(x-5\frac{1}{12}\right)z$ и $BC=12\frac{11}{12}y$. Отсюда получаем уравнение $\left(x-5\frac{1}{12}\right)z=12\frac{11}{12}y$. Перемножая эти уравнения, получим: $xy\left(x-5\frac{1}{12}\right)z=4\frac{1}{10}z\cdot 12\frac{11}{12}y$; $x^2-\frac{61}{12}x=\frac{41}{10}\cdot\frac{155}{12}$; $24x^2-122x-1271=0$. Отсюда: $x_1=-\frac{31}{6}$; $x_2=10\frac{1}{4}$. Первый корень не удовлетворяет условиям задачи. Итак, товарный поезд затратил на прохождение пути TC 10 *час* 15 *мин*, а на прохождение всего пути 10 *час* 15 *мин*+12 *час* 55 *мин*=23 *час* 10 *мин*. Пассажирский поезд затратил на прохождение пути BC 10 *час* 15 *мин*−5 *час* 5 *мин*=5 *час* 10 *мин*, а на прохождение всего пути 5 *час* 10 *мин*+4 *час* 6 *мин*=9 *час* 16 *мин*.

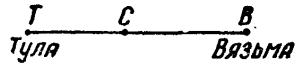


Рис. 1

278. Если обозначить скорость лодки в стоячей воде через x *км/час*, скорость течения реки и скорость движения плота через y, то скорость лодки по течению будет $x+y$, против течения $x-y$, время движения лодки по течению $\frac{20}{x+y}$ *час*, против течения $\frac{20}{x-y}$ *час*, до встречи с плотом $\frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}$ и, наконец, время движения плота $\frac{12}{y}$. Так как прогулка длилась 7 *час*, то получим уравнение $\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}=7$. Так как время движения

лодки и плота до их встречи одно и то же, то получаем уравнение $\frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}=\frac{12}{y}$. Из второго уравнения находим: $20y(x-y)+8y(x+y)=12(x^2-y^2)$; $7xy=3x^2$. Но $x=0$ не удовлетворяет условиям задачи, а поэтому $7y=3x$, $x=\frac{7}{3}y$. Подставив $x=\frac{7}{3}y$ в первое уравнение, найдем $y=3$, а следовательно, $x=7$. Итак, скорость лодки по течению равна 10 *км/час*, а скорость течения реки 3 *км/час*.

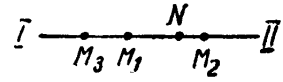


Рис. 2

279. Обозначим места первой, второй и третьей встреч курьеров буквами M_1, M_2, M_3 (рис. 2), скорость первого через v_1 *км/час*, а второго через v_2 *км/час*. При втором движении первый курьер идет до встречи со вторым дольше, чем первый раз, на 1 *час* — -18 *мин* $=1$ *час* $\frac{3}{10}$ *час* $=0{,}7$ *час*. Поэтому он проходит больше на $\frac{7}{10}v_1$ *км*, в то время как второй идет меньше времени на $\frac{1}{2}$ *час* $+18$ *мин* $=\frac{1}{2}$ *час* $+\frac{3}{10}$ *час* $=0{,}8$ *час* и проходит соответственно на $0{,}8\,v_2$ *км* меньше, чем при первом движении. Расстояние M_1M_2 и есть то дополнительное расстояние $0{,}7\,v_1$, которое пройдено первым, и одновременно расстояние $0{,}8\,v_2$, которое не дошел второй. Отсюда получаем уравнение $0{,}7v_1=0{,}8v_2$ или $7v_1=8v_2$.

При третьем движении второй курьер идет дольше первого на 1,5 *час* и проходит за эти 1,5 *час* путь $1{,}5v_2$ *км*, в то время как первый не доходит 5,6 *км* до точки M_1 и, следовательно, затрачивает времени на движение до встречи на $\frac{5{,}6}{v_1}$ *час* меньше, чем при первом движении. Таким образом, путь $1{,}5v_2$ *км*, пройденный вторым курьером за последние 1,5 *час* его движения до встречи, состоит из пути $M_1M_3=5{,}6$ *км* и того пути NM_1, который бы не дошел второй до M_1, если бы он двигался столько же времени, сколько и первый, т. е. на $\frac{5{,}6}{v_1}$ *час* меньше, чем при первом движении. Иначе: $M_3N=1{,}5v_2$, $M_3M_1=5{,}6$, $M_1N=\frac{5{,}6}{v_1}\cdot v_2$, а так как $M_3N=M_3M_1+M_1N$, то получаем уравнение $1{,}5v_2=5{,}6+\frac{5{,}6}{v_1}\cdot v_2$. Из первого уравнения находим $\frac{v_2}{v_1}=\frac{7}{8}$ и под-

ставляем во второе. Получаем $1{,}5v_2=5{,}6+5{,}6\cdot\frac{7}{8}=10{,}5$.

Итак, $v_2=7$, а тогда $v_1=\frac{8}{7}\cdot v_2=8$.

280. Обозначим число часов работы последнего рабочего через x, число часов работы предпоследнего через $x+y$, а число рабочих через z. На выполнение работы всего было затрачено число часов, равное $x+(x+y)+(x+2y)+[x+(z-1)y]=xz+$ $+y[1+2+\ldots+(z-1)]=xz+y\cdot\frac{z(z-1)}{2}$. По условию задачи это число часов равно 24 z. Отсюда получаем уравнение $xz+y\times$ $\times\frac{z(z-1)}{2}=24z$ или $2x+y(z-1)=48$. Но первый рабочий работал в 5 раз больше последнего. Поэтому получим еще такое уравнение: $x+(z-1)y=5x$. Вычитая это уравнение из первого, получим $x=48-5x$. Отсюда: $6x=48$; $x=8$. Так как продолжительность выполнения всей работы равна числу часов работы первого рабочего, то, следовательно, рабочие рыли канаву 40 *час.*

Замечание. Иногда решающие эту задачу предполагают, что продолжительность работы последнего рабочего равна промежутку времени, в течение которого первый работал в одиночку. Тогда число рабочих оказывается равным пяти и задача получает простое решение. Однако такое предположение подменяет эту задачу другой, потому что такое предположение не вытекает из условий задачи. На самом же деле продолжительность работы первого рабочего в одиночку будет различной и находится в зависимости от числа рабочих, как это видно из уравнения $(z-1)y=32$. Если рабочих было только 2, то интересующая нас продолжительность работы будет равна 32, если число рабочих было 3, то продолжительность равна 16 и т. д.

281. Пусть вес первого металла, входящего в сплав веса P, будет x *кг*. Тогда вес второго будет $(P-x)$ *кг*. Килограмм первого металла теряет в весе при погружении его в воду $\frac{B}{P}$ *кг*, а второго — $\frac{C}{P}$ *кг*. Так как потеря в весе данного куска сплава равна сумме потерь весов составляющих его металлов, то получаем уравнение

$$\frac{xB}{P}+\frac{(P-x)C}{P}=A.$$

Решив его, найдем, что $x=P\cdot\frac{A-C}{B-C}$, а $P-x=P\cdot\frac{B-A}{B-C}$.

Для возможности решения задачи нужно, чтобы x и $P-x$

были положительными или, иначе, чтобы числители и знаменатели найденных значений x и $P-x$ были одного знака. Это приводит к таким соотношениям: $C<A<B$ или $B<A<C$.

282. Обозначим вес отрезанного куска через x *кг*, а число процентов содержащейся в первом и втором кусках меди соответственно через y и z. Тогда в куске, отрезанном от первого сплава, будет содержаться $\frac{xy}{100}$ *кг* меди, в куске, отрезанном от второго сплава, $\frac{xz}{100}$ *кг*, а в остатках $\frac{(m-x)y}{100}$ и $\frac{(n-x)z}{100}$. В новых сплавах будет содержаться килограммов меди $\frac{xy}{100}+\frac{(n-x)z}{100}$ и $\frac{xz}{100}+\frac{(m-x)y}{100}$. Первый из новых сплавов будет весить n *кг*, второй — m *кг*, а процентное содержание меди в них одинаковое. Поэтому можно написать уравнение

$$\frac{\frac{xy}{100}+\frac{(n-x)z}{100}}{n}\cdot 100=\frac{\frac{xz}{100}+\frac{(m-x)y}{100}}{m}\cdot 100.$$

Отсюда: $\frac{xy+(n-x)z}{n}=\frac{xz+(m-x)y}{m}$; $xym+nmz-xzm=xzn+mny-xny$; $xm(y-z)+xn(y-z)=mn(y-z)$. Сокращая на $y-z\neq 0$, получаем $xm+xn=mn$, откуда $x=\frac{mn}{m+n}$.

283. Обозначим отношение объема C к сумме объемов A и B через $\frac{1}{x}$. Тогда можно написать:

$$\begin{cases} Am=B+C; \\ Bn=A+C; \\ Cx=A+B. \end{cases}$$

Прибавим A к обеим частям первого равенства. Получим $A(m+1)=A+B+C$. Отсюда $\frac{1}{m+1}=\frac{A}{A+B+C}$. Аналогичными преобразованиями получим $\frac{1}{n+1}=\frac{B}{A+B+C}$ и $\frac{1}{x+1}=\frac{C}{A+B+C}$. Почленное суммирование трех последних равенств дает $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{A+B+C}{A+B+C}=1$. Поэтому:

$\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}$; $\frac{1}{x+1}=\frac{mn-1}{(m+1)(n+1)}$; $x+1=\frac{(m+1)(n+1)}{mn-1}$; $x=\frac{(m+1)(n+1)}{mn-1}-1=\frac{m+n+2}{mn-1}$. Объем C составляет часть $\frac{mn-1}{m+n+2}$ суммы объемов A и B.

284. Пусть точки начали двигаться из одной точки окружности в разных направлениях (навстречу друг другу). Если скорость одной, рассчитанная на секунду, есть x, то она за время t_1 пройдет путь xt_1, а другая, если ее скорость, рассчитанная на секунду, есть y, пройдет путь yt_1. Сумма их путей составит длину окружности L. Поэтому получаем уравнение $xt_1+yt_1=L$ или $x+y=\frac{L}{t_1}$. Пусть теперь точки движутся в одном направлении, начав движение из одной и той же точки окружности. Тогда первая за время t_2 пройдет путь xt_2, а вторая за то же время пройдет путь yt_2. Полагаем $x>y$. Тогда первая, двигаясь быстрее второй, настигнет вторую по истечении t_2 *сек* и, следовательно, за время t_2 *сек* ее путь будет на L длиннее пути первой за то же время. Отсюда получим второе уравнение $xt_2-yt_2=L$ или $x-y=\frac{L}{t_2}$.

Решая систему

$$\begin{cases} x+y=\frac{L}{t_1}; \\ x-y=\frac{L}{t_2}; \end{cases}$$

найдем, что $x=\frac{L(t_1+t_2)}{2t_1t_2}$; $y=\frac{L(t_2-t_1)}{2t_1t_2}$ $(t_2>t_1)$. Следует заметить, что раз точки при обоих движениях (т. е. в одном направлении и в разных направлениях) сходились через равные промежутки t_1 и t_2, то они начинали движение из одной и той же точки окружности, чем мы при решении пользовались.

285. Пусть расстояние между A и B равно x *км*. Лодка прошла это расстояние за $\frac{x}{v}$ *час*, а пароход за $\frac{x}{w}$ *час*. Но лодка пришла в B на t *час* позднее парохода и, кроме того, еще до выхода парохода она была в движении $\frac{l}{v}$ *час*. Таким образом, лодка была в движении на $\left(t+\frac{l}{v}\right)$ *час* больше, чем пароход.

Отсюда получаем уравнение $\frac{x}{v}-\frac{x}{w}=t+\frac{l}{v}$. Решаем его: $xw-$ $-xv=vwt+lw$; $x=\frac{w(vt+l)}{w-v}$ $(w>v)$.

286. Обозначим искомое число досок через x. В первые два часа мастер выиграл $\frac{xp}{100}$ партий и l проиграл. Следующие два часа он вел игру уже на $\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)$ досках. Из всех партий, сыгранных за последние два часа, он выиграл $\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)\times$ $\times\frac{q}{100}$ партий, проиграл m и n партий свел вничью. Так как общее число партий, сыгранных за последние два часа, составляется из всех выигранных, проигранных и сведенных вничью партий за эти часы, то отсюда получаем уравнение $x-\frac{xp}{100}-l=$ $=\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)\frac{q}{100}+m+n$. Решив его, найдем, что $x=$ $=\frac{10\,000(m+n)+100l(100-q)}{(100-p)(100-q)}$.

287. В сосуде было чистой (стопроцентной) кислоты $\frac{ap}{100}$ *л*. Если в сосуд добавить x *л* q%-ного раствора кислоты, то количество чистой кислоты будет доведено до $\left(\frac{ap}{100}+\frac{xq}{100}\right)$ *л*. Но после добавления туда еще воды раствор будет содержать чистой кислоты $\frac{br}{100}$ *л*. Поэтому получим уравнение $\frac{ap}{100}+\frac{xq}{100}=$ $=\frac{br}{100}$, решив которое, найдем $x=\frac{br-ap}{q}$.

288. Пусть из каждого сосуда отлили x *л*. В первом сосуде осталось чистой кислоты $\frac{(a-x)p}{100}$ *л*, а во втором $\frac{(b-x)q}{100}$ *л*. Кроме того, в первый добавили ее $\frac{xq}{100}$ *л*, а во второй $\frac{xp}{100}$. Так как новые смеси стали одной концентрации, то получим:

$$\frac{1}{a}\left[\frac{(a-x)p}{100}+\frac{xq}{100}\right]=\frac{1}{b}\left[\frac{(b-x)q}{100}+\frac{xp}{100}\right];$$

$$bp(a-x)+bqx=aq(b-x)+apx;$$
$$x(a+b)(q-p)=ab(q-p).$$

Считая $p\neq q$ и разделив уравнение на $p-q\neq 0$, найдем $x=\frac{ab}{a+b}$.

Если $p=q$, то задача имеет бесконечное множество решений.

289. Пусть искомое расстояние есть x *км*, скорости первого и второго велосипедистов y *км/час* и z *км/час*. До первой встречи первый велосипедист проехал $(x+a)$ *км*, затратив на него $\frac{x+a}{y}$ *час*, а второй проехал $(x-a)$ *км* и затратил $\frac{x-a}{z}$ *час*. Так как время их движения одинаково, то приходим к уравнению $\frac{x+a}{y}=\frac{x-a}{z}$ или $\frac{x+a}{x-a}=\frac{y}{z}$. К моменту второй встречи первый велосипедист проехал $\left(2x+\frac{x}{k}\right)$ *км*, а второй $\left(2x-\frac{x}{k}\right)$ *км*. Таким образом, получаем второе уравнение $\frac{2x+\frac{x}{k}}{y}=\frac{2x-\frac{x}{k}}{z}$ или $\frac{2k+1}{2k-1}=\frac{y}{z}$. Подставляя значение $\frac{y}{z}$ из второго уравнения в первое, получим

$$\frac{x+a}{x-a}=\frac{2k+1}{2k-1},\quad x=2ka.$$

290. Пусть в начальный момент шарик находится в точке M (рис. 3). Так как угол падения равен углу отражения, то $\angle MNO=\angle ONP=\angle NPO=\angle OPM$, $\alpha=\beta$, $2\alpha=2\beta$ и $\triangle NMP$ — равнобедренный. Следовательно, $MQ\perp NP$ и положение точки N определится расстоянием $OQ=x$. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника имеем $\frac{OQ}{MO}=\frac{NQ}{NM}$ или $\frac{OQ^2}{MO^2}=\frac{NQ^2}{NM^2}$, что приводит к уравнению $\frac{x^2}{a^2}=\frac{R^2-x^2}{a^2+R^2+2ax}$. Из него находим:

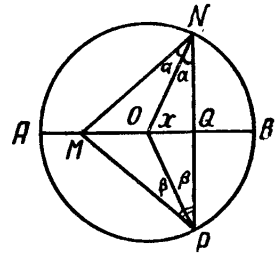


Рис. 3

$$x^2a^2+x^2R^2+2ax^3-a^2R^2+a^2x^2=0;\ 2ax^3+2a^2x^2+R^2x^2-a^2R^2=0;$$
$$2ax^2(a+x)+R^2(x^2-a^2)=0;\ (a+x)(2ax^2+R^2x-R^2a)=0.$$

Так как $a+x\neq 0$ $(x>0,\ a>0)$, то $2ax^2+R^2x-R^2a=0$. Отсюда $x=\frac{-R^2+\sqrt{R^4+8a^2R^2}}{4a}=\frac{R}{4a}(\sqrt{8a^2+R^2}-R)$.

291. Общий вес заполненного баллона состоит из веса оболочки $\left[\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3-\frac{4}{3}\pi R^3\right]d$ и веса жидкости $\frac{4}{3}\pi R^3\delta$, наполняющей баллон. Вес жидкости, вытесненной погруженным в нее баллоном, равен $\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3\Delta$. Все веса предполагаются измеренными одной и той же единицей веса. Так как погруженное тело находится в равновесии, то получаем уравнение

$$\left[\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3-\frac{4}{3}\pi R^3\right]d+\frac{4}{3}\pi R^3\delta=\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3\Delta.$$

Решаем его:

$$(R+\varepsilon)^3(d-\Delta)=R^3(d-\delta),\ \left(\frac{R+\varepsilon}{R}\right)^3=\frac{d-\delta}{d-\Delta},$$

$$\frac{R+\varepsilon}{R}=\sqrt[3]{\frac{d-\delta}{d-\Delta}},\ 1+\frac{\varepsilon}{R}=\sqrt[3]{\frac{d-\delta}{d-\Delta}}\quad R=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{\frac{d-\delta}{d-\Delta}}-1}.$$

Условия возможности задачи получатся из требования быть положительным R, т. е. из условия $\frac{d-\delta}{d-\Delta}>1$. Если $d-\Delta>0$, то получим: $d-\delta>d-\Delta$, $\delta<\Delta$, $\Delta<d$ и $\delta<\Delta<d$. Если $d-\Delta<0$, то $d-\delta<d-\Delta$, $\delta>\Delta$, $\Delta>d$ и $d<\Delta<\delta$.

292. Пусть число процентов прироста населения за год будет x. Если к началу первого года количество населения было A человек, то к началу второго года оно стало $A_1=A+\frac{Ax}{100}=A\left(1+\frac{x}{100}\right)$, а к началу третьего $A_2=A_1\left(1+\frac{x}{100}\right)=A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$ и т. д. Очевидно, к началу n-го года количество населения будет $A\left(1+\frac{x}{100}\right)^{n-1}$, а к его концу — $A\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$. При годовом приросте населения, равном $(x+k)$ процентов, общее число населения к концу n-го года будет $A\left(1+\frac{x+k}{100}\right)^n$. Во втором случае численность населения должна быть в два раза больше, чем в первом. Отсюда получаем уравнение

$$A\left(1+\frac{x+k}{100}\right)^n=2A\left(1+\frac{x}{100}\right)^n.$$

Решаем его:

$$1+\frac{x+k}{100}=\sqrt[n]{2}\left(1+\frac{x}{100}\right),\quad (\sqrt[n]{2}-1)x=k-100(\sqrt[n]{2}-1),$$

$$x=\frac{k}{\sqrt[n]{2}-1}-100.$$

Задача возможна лишь при таких k и n, при которых найденное значение для x будет положительное.

293. Если вес сосуда p, а его объем v, то при заполнении его первой жидкостью общий вес сосуда будет $(vd+p)$ *кг*, а при заполнении второй — $vD+p$. С другой стороны, эти веса равны q и Q. Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} vd+p=q; \\ vD+p=Q, \end{cases}$$

из которой находим, что $v=\frac{Q-q}{D-d}$; $p=\frac{Dq-dQ}{D-d}$.

Условия возможности задачи сводятся к условиям положительности найденных дробей для p и v. Это приводит к требованиям, чтобы было или $\frac{D}{d}>\frac{Q}{q}>1$, или $\frac{D}{d}<\frac{Q}{q}<1$. Если хотя бы одна из дробей неположительна или если $D=d$, а $Q\neq d$, то задача неразрешима. Если же $D=d$ и $Q=q$, то вес p и объем v связаны одним соотношением $vd+p=q$ и задача имеет бесконечное множество решений.

294. Обозначим скорости первого и второго поездов через v_1 *км/час* и v_2 *км/час*, а расстояние между A и B через x *км*. Двигаясь после встречи в противоположных направлениях, поезда через t *час* оказались на расстоянии $2x$ друг от друга. До встречи они вместе покрыли расстояние x, т. е. в два раза меньшее, чем после встречи. Таким образом, встретились они через $\frac{1}{2}t$ *час* после выезда из начальных пунктов A и B. Поэтому можно написать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x-p=\frac{1}{2}tv_1; \\ p=\frac{1}{2}tv_2; \\ x-p+q=v_2t. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $v_2=\frac{2p}{t}$, а подставив это значе-

ние v_2 в третье, найдем $x=3p-q$. Теперь из первого легко находится $v_1=\dfrac{2(2p-q)}{t}$.

295. Как видно из условия задачи, числа x, y и z должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x=m(y-z); \\ y=n(x-z); \\ z=2(x-y). \end{cases}$$

Решив систему первых двух уравнений относительно x и y, найдем, что $x=\dfrac{(m+mn)z}{mn-1}$; $y=\dfrac{(n+mn)z}{mn-1}$, а подставив эти значения x и y в третье уравнение, получим искомую зависимость в следующем виде: $z=\dfrac{(2m-2n)z}{mn-1}$ или $mn-2m+2n-1=0$.

296. Пусть часы уходят на x *мин* в сутки. Тогда, чтобы они показывали правильное время, им придется ходить $\dfrac{m}{x}$ суток. Если бы они уходили вперед на $(x+t)$ *мин* в сутки, то при отставании в данный момент на n *мин* от правильного времени им пришлось бы ходить $\dfrac{n}{x+t}$ суток или на 1 сутки меньше, чем $\dfrac{m}{x}$, чтобы ликвидировать это отставание. Итак, $\dfrac{m}{x}-1=\dfrac{n}{x+t}$, $x^2+(t+n-m)x-mt=0$; $x=\dfrac{m-n-t+\sqrt{(m-n-t)^2+4mt}}{2}$. Второй корень отрицательный, и его отбрасываем.

297. Пусть детей было x. Последний из них, т. е. x-овый, получил ax орехов плюс $\dfrac{1}{n}$ остатка. Но так как это был последний из участников дележа, а орехи между ними были поделены все, то и остатка не могло быть. Следовательно, каждый получил по ax орехов, а всего орехов было $ax\cdot x=ax^2$. Доля первого тоже была ax, но, с другой стороны, она равна $a+\dfrac{ax^2-a}{n}$. Поэтому получаем: $ax=a+\dfrac{ax^2-a}{n}$, $x=1+\dfrac{x^2-1}{n}$, $x^2-nx+n-1=0$, $x=\dfrac{n\pm(n-2)}{2}$; $x_1=n-1$, $x_2=1$.

298. Пусть куплено x *кг* лигроина. Тогда керосина было куплено $(n-x)$ *кг*. Цена килограмма лигроина есть $\dfrac{a}{x}$ руб. и керо-

сина $\frac{a}{n-x}$ руб. Так как килограмм лигроина на b руб. дороже килограмма керосина, то получаем уравнение

$$\frac{a}{x}-\frac{a}{n-x}=b.$$

Решаем его: $a(n-x)-ax=bx(n-x)$, $bx^2-(2a+bn)x+an=0$; $x=\frac{2a+bn\pm\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}$. Знак плюс перед радикалом не годится, потому что в этом случае x был бы больше n, так как

$$\frac{2a+bn}{2b}>\frac{bn}{2b}=\frac{n}{2} \text{ и } \frac{\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}>\frac{\sqrt{b^2n^2}}{2b}=\frac{bn}{2b}=\frac{n}{2}.$$

Итак, имеем лигроина $\frac{2a+bn-\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}$ *кг*, а керосина

$$n-\frac{2a+bn-\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}=\frac{bn-2a+\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}.$$

299. Пусть искомая скорость есть x *км/час*. Первая машина проходит путь d *км* в $\frac{d}{x}$ *час*, а вторая находится в пути на t *мин* меньше, т. е. $\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{60}\right)$ *час*. Половину времени, в течение которого вторая машина находится в движении, она расходует на то, чтобы догнать первую, и покрывает при этом расстояние $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{60}\right)v$ *км*. Первая машина прибыла в B одновременно с прибытием второй в A и, следовательно, после получения пакета была в движении столько же времени, сколько и вторая, т. е. $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{60}\right)$ *час*. Поэтому на движение первой машины от момента выхода из A до момента получения пакета пошло $\frac{d}{x}-$ $-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{60}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{x}+\frac{t}{60}\right)$ *час*, за которые она прошла расстояние $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{x}+\frac{t}{60}\right)x$ *км*. Поэтому получаем уравнение $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{60}\right)v=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{x}+\frac{t}{60}\right)x$. Решив его, найдем, что

$$x=\frac{-(60d+tv)\pm\sqrt{(60d+tv)^2+240dvt}}{2t},$$

а так как скорость может быть только положительной, то ответ будет такой:

$$\frac{-(60d+tv)+\sqrt{(60d+tv)^2+240dtv}}{2t}\ км/час.$$

300. Обозначим число рабочих первой бригады через x. Тогда во второй их будет $x+a$, а в обеих вместе $2x+a$ человек. Каждая бригада получила число рублей, превышающее число рабочих в обеих бригадах на c, т. е. $2x+a+c$, а следовательно, рабочий первой бригады получил $\frac{2x+a+c}{x}$ руб., рабочий же второй бригады $\frac{2x+a+c}{x+a}$ руб. Но рабочий второй бригады получил на b руб. меньше рабочего первой бригады. Поэтому можно написать такое уравнение: $\frac{2x+a+c}{x+a}+b=\frac{2x+a+c}{x}$. После несложных упрощений получим $bx^2+(ab-2a)x-a(a+c)=0$. Отсюда $x=\frac{2a-ab\pm\sqrt{(2a-ab)^2+4ab(a+c)}}{2b}$. Знак минус перед корнем следует отбросить, потому что соответствующее ему решение будет отрицательным. Действительно,

$$|2a-ab|<\sqrt{(2a-ab)^2+4ab(a+c)}.$$

Итак,

$$x=\frac{2a-ab+\sqrt{(2a-ab)^2+4ab(a+c)}}{2b}.$$

301. Пусть второй рабочий работал x дней. До того как приступил к работе второй, первый работал один в течение a дней и выполнил часть работы, равную $\frac{p}{q}$ всей работы. Следовательно, первый может выполнить и выполнил в день часть работы, равную $\frac{p}{qa}$. Второму пришлось выполнить оставшуюся часть работы, а именно часть, равную $1-\frac{p}{q}=\frac{q-p}{q}$. Отсюда видно, что второй выполнил в день часть работы, равную $\frac{q-p}{qx}$. Но в те-

чение $\frac{a+x}{2}$ дней рабочие, работая вместе, могут выполнить всю работу, поэтому имеем уравнение

$$\frac{p}{qa}\cdot\frac{a+x}{2}+\frac{q-p}{qx}\cdot\frac{a+x}{2}=1.$$

Решаем его:

$$px(a+x)+(q-p)a(a+x)=2qax,\ px^2-aqx+a^2(q-p)=0;$$

$$x=\frac{aq\pm\sqrt{a^2q^2-4a^2p(q-p)}}{2p}=\frac{aq\pm(aq-2ap)}{2p},$$

$$x_1=\frac{a}{p}(q-p),\ x_2=a.$$

Оба корня удовлетворяют условиям задачи $(q>p)$.

302. Обозначим скорость одного тела через x *м/мин*. Это тело проходит окружность за $\frac{a}{x}$ *мин*. Пусть другое тело движется медленнее, тогда время, за которое второе тело пройдет окружность, будет равно $\left(\frac{a}{x}+p\right)$ *мин*, а его скорость $\frac{a}{\frac{a}{x}+p}$ *м/мин*.

За q *мин* первое проходит путь xq *м*, а второе $\frac{aq}{\frac{a}{x}+p}$ *м*. Но за время q *мин* первое тело проходит на a *м* больше, чем второе тело, потому что настигает второе тело за это время. Поэтому получаем уравнение $\frac{aq}{\frac{a}{x}+p}+a=qx$, решив которое, найдем $x=\frac{ap\pm\sqrt{a^2p^2+4a^2pq}}{2pq}$. Так как отрицательное значение x должно быть отброшено, то получаем, что одно тело проходит в минуту $a\frac{p+\sqrt{p^2+4pq}}{2pq}$ *м*, а другое $\frac{a}{\frac{a}{x}+p}=a\frac{\sqrt{p^2+4pq}-p}{2pq}$ *м*.

303. Пусть первый работал x дней, тогда второй работал $(x-n)$ дней. За один рабочий день первый получал по $\frac{a}{x}$ руб., а второй по $\frac{c}{x-n}$ руб. Если бы первый работал $(x-n)$ дней, а

второй x дней, то первый заработал бы $\frac{a}{x}(x-n)$ руб., а второй $\frac{c}{x-n}x$ руб. Но в этом случае их заработки были бы одинаковы. Поэтому получаем уравнение $\frac{a}{x}(x-n)=\frac{c}{x-n}x$. Решаем его: $a(x-n)^2=cx^2$, $\sqrt{a}(x-n)=\pm x\sqrt{c}$. Но так как левая часть положительна ($x-n>0$), то знак минус в правой части должен быть отброшен. Поэтому получаем $x=\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$. Второй работал число дней, равное $x-n=\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}-n=\frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$ $(a>c)$.

304. Обозначим число экскурсантов через x. Каждый из них должен был заплатить $\frac{a}{x}$ руб. Но из-за отсутствия у b экскурсантов денег остальные $x-b$ уплатили каждый по $\left(\frac{a}{x}+c\right)$ руб., а все вместе, принявшие участие в платеже, $\left(\frac{a}{x}+c\right)(x-b)$. Последняя сумма составляет полный расход, т. е. a руб., и поэтому получаем уравнение $\left(\frac{a}{x}+c\right)(x-b)=a$, решив которое, найдем $x=\frac{cb\pm\sqrt{c^2b^2+4abc}}{2c}$. Знак минус нужно отбросить, так как в этом случае решение отрицательное ($cb<\sqrt{c^2b^2+4abc}$).

305. Пусть искомая скорость есть x *км/час*. Скорость же фактическая равна $(x+v)$ *км/час*. Время движения поезда по расписанию равно $\frac{d}{x}$ *час*, а фактически было затрачено $\frac{d}{x+v}$ *час*, что оказалось меньше на p *мин*. Отсюда получаем уравнение $\frac{d}{x}-\frac{d}{x+v}=\frac{p}{60}$, решив которое, найдем $x=\frac{-pv\pm\sqrt{p^2v^2+240pvd}}{2p}$. Знак минус перед радикалом нужно отбросить, так как в этом случае получается отрицательное решение, что невозможно.

306. Если сумма вклада есть x руб., а сберкасса выплачивает y % годовых, то x и y найдутся из системы

$$\begin{cases}\frac{xya}{1200}=m-x,\\ \frac{xyb}{1200}=n-x.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на второе, а затем вычтя из первого уравнения второе, придем к следующей системе, равносильной данной:

$$\begin{cases} \dfrac{m-x}{n-x} = \dfrac{a}{b}; \\ \dfrac{xy(a-b)}{1200} = m-n. \end{cases}$$

Решив ее, получим: $x = \dfrac{an-bm}{a-b}$; $y = \dfrac{1200(m-n)}{an-bm}$.

Если учесть, что x и y должны быть положительны, то отсюда легко получить условия возможности задачи. Для этого должно быть $\dfrac{a}{b} > \dfrac{m}{n} > 1$ или $0 < \dfrac{a}{b} < \dfrac{m}{n} < 1$.

307. Так как в третьем сосуде, как и в двух других, после третьего разлива оказалось 16 *л*, то после второго разлива в нем было 32 *л* и 16 из них вылито в первый и второй по 8 *л* в каждый. Отсюда заключаем, что в первый сосуд из третьего было влито 8 *л*. Сколько же в него было влито из второго? После третьего разлива, когда во второй было влито из третьего 8 *л*, во втором оказалось 16 *л*. Следовательно, до третьего разлива, т. е. сразу после второго, во втором сосуде также было 8 *л* и, следовательно, при втором разливе из второго сосуда было перелито в первый и третий 8 *л*, по 4 *л* в каждый. Отсюда заключаем, что в первый сосуд из третьего и второго сосудов было перелито 8 *л* + 4 *л* = = 12 *л*. При первом разливе из первого сосуда была перелита во второй и третий половина содержимого, и, значит, в нем оставалась половина количества литров, бывшего там сначала. Отсюда следует, что эта половина есть 16 *л* — 12 *л* = 4 *л*, а всего в первом сосуде было 8 *л*. Определим теперь количество литров жидкости, находившееся вначале во втором сосуде. В него было влито из третьего сосуда 8 *л*, из первого 2 *л* и вылито 8 *л* в третий и первый. Так как в результате в нем оказалось 16 *л*, то, следовательно, в нем было 14 *л* (16 — 8 — 2 + 8). Но раз в первом было 8 *л*, во втором 14 *л*, а во всех трех 48, то в третьем было 26 *л*.

308. Если путь от Ленинграда до Москвы в километрах обозначить буквой S, время движения поезда в часах буквой t_1, а обратно t_2, то искомая скорость в *км/час* будет такая: $v = \dfrac{2S}{t_1 + t_2}$.

Но $t_1 = \dfrac{S}{20}$, $t_2 = \dfrac{S}{30}$ и $v = \dfrac{2S}{\dfrac{S}{20} + \dfrac{S}{30}} = \dfrac{2 \cdot 60}{3+2} = 24$.

309. Обозначим цифру единиц первого разряда буквой a_1, цифру единиц второго разряда — буквой a_2 и т. д. по разрядам, вплоть до цифры единиц самого высокого разряда, которую обозначим

буквой a_n. Само число будем изображать так: $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$. Тогда число, изображенное теми же цифрами, но написанными в обратном порядке, будет $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$. Из арифметики известно, что всякое число можно представить как сумму некоторого числа кратного девяти и суммы цифр данного числа. Поэтому каждое из написанных выше двух чисел можно представить так:

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = 9A + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 = 9B + a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n - a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 = 9A - 9B = 9(A - B),$$

т. е. разность чисел есть кратное девяти.

Замечание. Из этого доказательства видно, что если второе число будет любое, но составленное из тех же цифр, что и данное, то разность таких чисел будет делиться нацело на 9.

IV.

ПРОГРЕССИИ

310. Не могут, так как если бы было $a_k = \sqrt{3}$, $a_l = 2$, $a_m = \sqrt{8}$, то, считая для определенности $k < l < m$, имели бы

$$2 = \sqrt{3} + (l - k)\,d, \quad \sqrt{8} = \sqrt{3} + (m - k)\,d,$$

откуда получили бы, что

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{8 - \sqrt{3}} = \frac{l - k}{m - k}.$$

Но это невозможно, так как слева иррациональное число, а справа рациональное

311. Воспользуемся формулой

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

где a_1 и d — первый член и разность прогрессии. Получим

$$a_m + a_n = a_1 + d(m - 1) + a_1 + d(n - 1) = 2a_1 + d(m + n - 2) = 2a_1 + d(k + l - 2) = a_1 + d(k - 1) + a_1 + d(l - 1) = a_k + a_l.$$

312. Числа a_{n-1}, a_n, a_{n+1} являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Поэтому $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ или $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

313. $a_6 + a_{15} = a_9 + a_{12} = a_1 + a_{20}$, так как a_6 и a_{15}, а также a_9 и a_{12} являются равноотстоящими от концов прогрессии членами. Отсюда:

$$2(a_1 + a_{20}) = 20;\ a_1 + a_{20} = 10;$$
$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})\,20}{2} = 100.$$

314. По свойству арифметической прогрессии $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ или $a_1 + a_3 = 2a_2$. Заменив $a_1 + a_2$ через $2a_2$ в первом уравнении, получим $3a_2 = 9$, $a_2 = 3$ и $a_1 + a_3 = 6$. Подставив значение a_2 во второе уравнение, получим $3a_1a_3 = 15$ или $a_1a_3 = 5$. Итак, имеем систему $a_1a_3 = 5$, $a_1 + a_3 = 6$. Решив ее, получим для a_1 два значения: 1 и 5. Точно так же для разности прогрессии d получим два значения: $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$, $a_2 - a_1 = 3 - 5 = -2$. Следовательно, и две прогрессии:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots;$$
$$5,\ 3,\ 1,\ -1,\ \ldots$$

315. Положим в формуле для S_n вместо n сперва число 1, а потом число 2. Получим $S_1 = a_1 = -1$, $S_2 = a_1 + a_2 = 2$. Отсюда $a_2 = 2 - a_1 = 3$, $d = a_2 - a_1 = 4$. Прогрессия будет такая: -1, 3, 7, 11, ...

316. $a_{10} = S_{10} - S_9 = 280 - 225 = 55$.

317. Сформулированное в задаче условие можно записать так: $S_k = 4k^2$, где k — число просуммированных членов прогрессии, а S_k — сумма этих k членов. Полагая в этой формуле $k = 1$ и затем $k = 2$, получим:

$$S_1 = a_1 = 4 \cdot 1^2 = 4;\ S_2 = a_1 + a_2 = 16.$$

Таким образом, имеем

$$a_1 = 4,\ a_2 = 16 - a_1 = 12.$$

Отсюда находим разность прогрессии $d = a_2 - a_1 = 8$. Теперь известны первый член $a_1 = 4$ прогрессии и ее разность $d = 8$; следовательно, прогрессия известна. Первые ее члены таковы: 4, 12, 20, 28, ...

318. Замечая, что в арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_{10} по определению арифметической прогрессии, $a_2 - a_1 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{10} - a_9 = d$, где d — разность прогрессии, можем написать

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{10} - a_1 - a_3 - \ldots - a_9 = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{10} - a_9) = 5d = 15 - 12{,}5 = 2{,}5.$$

Отсюда $d = 0{,}5$. Найдем теперь первый член прогрессии из выражения суммы ее десяти членов:

$$S_{10} = 15 + 12{,}5 = 27{,}5 = \frac{2a_1 + 9 \cdot 0{,}5}{2} \cdot 10 = 5(2a_1 + 4{,}5),$$
$$2a_1 + 4{,}5 = 5{,}5;\ a_1 = 0{,}5.$$

Искомая прогрессия будет такая:

$$0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ 4;\ 4{,}5;\ 5.$$

319. Так как по условию $a_p = q$ и $a_q = p$, то $a_p - a_q = q - p$. С другой стороны, используя формулу $a_k = a_1 + d(k-1)$, где d — разность прогрессии, получим

$$a_p - a_q = a_1 + d(p-1) - a_1 - d(q-1) = d(p-q).$$

Сравниваем два полученных для $a_p - a_q$ выражения: $q - p = d(p - q)$. Отсюда находим, что $d = -1$. Но $a_m - a_p = (m-p)d$ и $a_m = a_p + (m-p)d = q - m + p$.

320. Для доказательства достаточно установить, что

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c} = \frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b}.$$

Замечая, что числа a^2, b^2, c^2, как образующие арифметическую прогрессию, связаны соотношением

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2,$$

преобразуем написанные разности так:

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c} = \frac{a-b}{(b+c)(a+c)} = \frac{a^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b} = \frac{b-c}{(a+c)(a+b)} = \frac{b^2-c^2}{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

В полученных выражениях знаменатели одинаковы и числители равны на основании соотношения

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c} = \frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b}.$$

321. Дроби, сумму S которых нужно найти, находятся среди следующих:

$$m = \frac{3m}{3},\ \frac{3m+1}{3},\ \frac{3m+2}{3},\ \ldots,\ \frac{3n-1}{3},\ \frac{3n}{3} = n.$$

Эта последовательность есть конечная арифметическая прогрессия с первым членом m и разностью $d = \frac{1}{3}$. Число k ее членов найдем из равенства

$$n = m + \frac{1}{3}(k-1),$$

откуда $k = 3n - 3m + 1$. Следовательно, сумма этих дробей

$$S_1 = \frac{(m+n)(3n-3m+1)}{2}.$$

Но в сумму S_1 вошли также сократимые дроби $\frac{3m}{3}$, $\frac{3m+3}{3}$, ..., $\frac{3n-3}{3}$, $\frac{3n}{3}$. Иначе их можно записать так: m, $m+1$, ..., $n-1$, n. Этих чисел $n-m+1$, они образуют арифметическую прогрессию и потому их сумма

$$S_2 = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$$

Теперь можно написать, что искомая сумма

$$S = S_1 - S_2 = \frac{(m+n)(3n-3m+1)}{2} - \frac{(m+n)(n-m+1)}{2} =$$
$$= n^2 - m^2.$$

322. Из равенства $S_m = S_n$ получаем:

$$\frac{2a_1 + d(m-1)}{2} m = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n, \; 2a_1(m-n) +$$
$$+ d(m^2 - m - n^2 + n) = 0,$$
$$(m-n)[2a_1 + d(m+n-1)] = 0$$

или после сокращения на $m - n \neq 0$ получим

$$2a_1 + d(m+n-1) = 0.$$

Поэтому $S_{m+n} = \frac{2a_1 + d(m+n-1)}{2}(m+n) = 0.$

323. Воспользуемся формулой

$$S_k = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} k.$$

На основании ее и условия задачи получим

$$\frac{[2a_1 + d(m-1)]\, m}{[2a_1 + d(n-1)]\, n} = \frac{m^2}{n^2}$$

или

$$[2a_1 + d(m-1)]\, n = [2a_1 + d(n-1)]\, m.$$

Преобразуем последнее равенство:

$$2a_1(m-n) + d[(n-1)m - (m-1)n] = 0,$$
$$2a_1(m-n) - d(m-n) = 0.$$

После сокращения на $m - n \neq 0$ найдем, что $d = 2a_1$. Теперь можем написать, что

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + d(m-1)}{a_1 + d(n-1)} = \frac{a_1 + 2a_1(m-1)}{a_1 + 2a_1(n-1)} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

324. Каждый ряд из m параллельных линий вместе с двумя сторонами параллелограмма, которым линии соответствующего ряда параллельны, образуют ряд из $(m+2)$ параллельных линий. Будем их нумеровать по порядку 1, 2, 3, . ., $m+2$ сверху вниз и слева направо и называть 1, 2, 3-я, . . ., $(m+2)$-я по вертикали и 1, 2, 3-я, . . ., $(m+2)$-я по горизонтали. Первая линия по вертикали с каждой следующей, т. е 2, 3-й, ..., $(m+2)$-й по вертикали образует по одному параллелограмму, а всего $(m+1)$ параллелограммов (рис. 4). При этом предполагается, что m горизонтальных линий еще не проведены. Вторая линия по вертикали образует с 3, 4-й, . ., $(m+2)$-й всего m параллелограммов (параллелограмм, образованный ею с первой линией по вертикали, учтен ранее) Третья линия по вертикали образует с каждой следующей по вертикали по параллелограмму, а всего $(m-1)$ параллелограммов И так далее, вплоть до $(m+1)$-й линии по вертикали, которая образует с единственной следующей один параллелограмм Итак, одни вертикальные линии с двумя горизонтальными (сторонами данного параллелограмма) образуют число параллелограммов, равное сумме членов следующей прогрессии: $m+1$, m, $m-1$, . . ., 2 1 Эта сумма равна

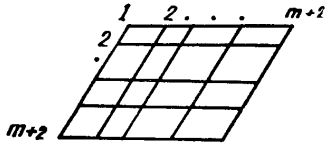


Рис. 4

$$\frac{(m+1)+1}{2}(m+1)=\frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

причем сюда же вошел и данный параллелограмм Проведем теперь m горизонтальных линий и, выбрав какой-нибудь из полученных ранее параллелограммов, будем относительно его и $(m+2)$ горизонталей повторять рассуждения, приведенные выше применительно к данному параллелограмму и $(m+2)$ вертикалям. Мы убедимся, что с помощью $(m+2)$ горизонталей можно из каждого ранее полученного параллелограмма образовать $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ параллелограммов, а следовательно, всего с помощью двух рядов прямых, параллельных сторонам параллелограмма, по m линий в каждом, с учетом сторон параллелограмма, можно образовать

$$\left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right]^2=\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

параллелограммов.

325. Составим разности соседних членов заданной последовательности:

$$b_1=5-3=2,\ b_2=9-5=4,\ b_3=15-9=6,\ \ldots$$

Числа 2, 4, 6, ... образуют арифметическую прогрессию с разно-

стью $d = 2$. Таким образом, член данной последовательности равен сумме предыдущего члена этой последовательности и того члена найденной арифметической прогрессии, номер которого равен номеру предыдущего, т. е.

$$a_k = a_{k-1} + b_{k-1}.$$

Поэтому получим

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-1} = \ldots = a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = 3 + 2 + 4 + \ldots + (2n - 2) =$$
$$= 3 + 2(1 + 2 + \ldots + n - 1) = 3 + n(n - 1) = n^2 - n + 3.$$

326. Если m — четное число, то искомая сумма

$$S_m = (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \ldots + [(m-1)^2 - m^2] =$$
$$= -3 - 7 - \ldots - (2m - 1) =$$
$$= -\frac{(3 + 2m - 1) \cdot \frac{m}{2}}{2} = -\frac{m(m+1)}{2}.$$

Если m — нечетное число, то

$$S_m = S_{m-1} + m^2 = -\frac{(m-1)m}{2} + m^2 = \frac{m(m+1)}{2}.$$

327. Все четыре последовательности являются геометрическими прогрессиями. Знаменатель первой прогрессии есть $q_1 = -\frac{1}{2}$, знаменатель второй $q_2 = 1$, знаменатель третьей $q_3 = -1$, наконец, знаменатель четвертой $q_4 = 0$.

328. Не могут. Для того чтобы они могли быть членами геометрической прогрессии, должны существовать такое число q и натуральные числа m и n, при которых выполнялись бы равенства:

$$11 = 10q^m;$$
$$12 = 10q^n.$$

Но тогда было бы $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{12}{10}\right)^m$ или $11^n = 12^m 10^{n-m}$, что, очевидно, невозможно.

329. Воспользуемся формулой $a_n = a_1 q^{n-1}$, где a_1 и q — первый член и знаменатель прогрессии. Получим

$$a_m a_n = a_1 q^{m-1} a_1 q^{n-1} = a_1^2 q^{m+n-2} = a_1^2 q^{k+l-2} =$$
$$= a_1 q^{k-1} a_1 q^{l-1} = a_k a_l.$$

330. Числа a_{n-1}, a_n, a_{n+1} являются последовательными членами геометрической прогрессии. Поэтому $a_n : a_{n-1} = a_{n+1} : a_n$ или $a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}$. В доказательстве предполагалось, что знаменатель

прогрессии $q \neq 0$. Однако справедливость доказываемого равенства для случая $q = 0$ очевидна.

331. Раскрываем скобки в левой части и пользуемся формулой $y^2 = xz$. Получим

$$(x + z + y)(x + z - y) = (x + z)^2 - y^2 = x^2 + 2xz + z^2 - \\ - y^2 = x^2 + 2y^2 + z^2 - y^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

332. Рассматриваемую сумму можно записать так:

$$5\left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9}\right).$$

Так как первые слагаемые в числителях дробей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 10, то последнее выражение легко преобразуется к виду

$$\frac{5}{9}\left(10 \cdot \frac{10^n-1}{9} - n\right).$$

333. $\underbrace{11\ldots1}_{k}\ \underbrace{55\ldots5}_{k-1}6 = (10^{2k-1} + 10^{2k-2} + \ldots + 10 + \\ + 1) + 4(10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10 + 1) + 1 =$

$$= \frac{10^{2k}-1}{10-1} + 4 \cdot \frac{10^k-1}{10-1} + 1 = \frac{1}{9}(10^{2k} - 1 + 4 \cdot 10^k - 4 + 9) =$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2k} + 2 \cdot 10^k \cdot 2 + 2^2) = \left(\frac{10^k+2}{3}\right)^2 = \left(\frac{10^k-1}{3} + 1\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{3(10^k-1)}{9} + 1\right]^2 = \left[\frac{3(10^k-1)}{10-1} + 1\right]^2 =$$

$$= [3(10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10 + 1) + 1]^2 =$$

$$= (3 \cdot 10^{k-1} + 3 \cdot 10^{k-2} + \ldots + 3 \cdot 10 + 4)^2 = \underbrace{33\ldots3}_{k-1}4^2.$$

334. Обозначим первый член прогрессии через x, а знаменатель через y. Тогда для этих трех членов x, xy и xy^2 на основании условия задачи можно написать

$$x + xy + xy^2 = 3{,}5, \quad x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 5{,}25.$$

Возведем в квадрат обе части первого уравнения и разделим его после этого почленно на второе уравнение. Получим

$$\frac{x^2(1 + y + y^2)^2}{x^2(1 + y^2 + y^4)} = \frac{12{,}25}{5{,}25}.$$

Решаем это уравнение, предварительно сократив левую часть на $x^2 \neq 0$:

$$\frac{(1 + y + y^2)^2}{1 + y^2 + y^4} = \frac{7}{3}, \quad 3(1 + y + y^2)^2 = 7(1 + 2y^2 + y^4 - y^2),$$

$$3(1+y+y^2)^2 = 7[(1+y^2)^2 - y^2],\ 3(1+y+y^2)^2 = 7(1+y^2+y)(1+y^2-y),\ (1+y+y^2)[3(1+y+y^2) - 7(1+y^2-y)] = 0.$$

Но $1+y+y^2=0$ не имеет вещественных корней. Знаменатель прогрессии y определяется поэтому из уравнения

$$3(1+y+y^2) - 7(1+y^2-y) = 0.$$

Находим:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0;\ y_1 = 2,\ y_2 = \frac{1}{2},\ x_1 = \frac{3{,}5}{1+y_1+y_1^2} = \frac{3{,}5}{7} = 0{,}5,\ x_2 = \frac{3{,}5}{1+y_2+y_2^2} = \frac{3{,}5 \cdot 4}{7} = 2.$$

Итак, задача имеет два решения: $x_1 = 0{,}5$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 0{,}5$.

335. Будем рассматривать a_n как первый член арифметической прогрессии. Тогда a_{m+n} будет $(m+1)$-й член этой прогрессии и будем иметь соотношение $a_{m+n} = a_n + md$. Совершенно так же, рассматривая a_m как первый член арифметической прогрессии, а a_{m+n} как $(n+1)$-й член, получим

$$a_{m+n} = a_m + nd.$$

Наконец, рассматривая a_{m-n} как первый член прогрессии, а a_{m+n} как $(2n+1)$-й член, получим

$$a_{m+n} = a_{m-n} + 2nd.$$

Во всех этих равенствах d есть разность данной прогрессии. Из этих трех уравнений находим:

$$a_m = a_{m+n} - nd = A - nd,\ a_n = a_{m+n} - md = A - md,$$

$$d = \frac{a_{m+n} - a_{m-n}}{2nd} = \frac{A-B}{2nd}.$$

Подставляя значение d в первые два уравнения, находим:

$$a_m = A - n \cdot \frac{A-B}{2n} = A - \frac{A-B}{2} = \frac{A+B}{2},$$

$$a_n = A - m \cdot \frac{A-B}{2n} = \frac{2nA - mA + mB}{2n} = \frac{(2n-m)A + mB}{2n}.$$

336. Рассматривая a_m как первый член геометрической прогрессии, а a_{m+n} как $(n+1)$-й, получим $a_{m+n} = a_m q^n$ или $a_m = Aq^{-n}$. Рассматривая a_n как первый член геометрической прогрессии, а a_{m+n} как $(m+1)$-й член, найдем $a_{m+n} = a_n q^m$ или $a_n = Aq^{-m}$. Наконец, рассматривая a_{m-n} как первый член геометрической прогрессии, а a_{m+n} как $(2n+1)$-й член, придем к соотношению

$a_{m+n} = a_{m-n} q^{2n}$ или $A = Bq^{2n}$. Во всех этих равенствах q знаменатель данной прогрессии. Из последнего уравнения находим

$$q = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

и подставляем его в первое и второе уравнения. Получаем:

$$a_m = A \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{-n}{2n}} = A \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{AB};\ a_n = A \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{m}{2n}}.$$

337. Обозначим знаменатель этой прогрессии буквой q и будем число a считать первым членом этой прогрессии. Тогда можем написать, что $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$. Пользуясь этими формулами, получим

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (aq - aq^2)^2 = (aq^2 - a)^2 +$$
$$+ (aq^3 - aq)^2 = a^2(1-q)^2[q^2 + (q+1)^2 + q^2(q+1)^2] =$$
$$= a^2(1-q)^2(q^2 + q^2 + 2q + 1 + q^4 + 2q^3 + q^2) =$$
$$= a^2(1-q)^2[q^2 + 2q(1+q^2) + (1+q^2)^2] =$$
$$a^2(1-q)^2(q+1+q^2)^2 = a^2(1-q^3)^2 = (a - aq^3)^2 = (a-d)^2.$$

338. Обозначим данное выражение буквой S и воспользуемся формулой квадрата суммы двух чисел. Получим

$$S = \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(x^{2n} + 2 + \frac{1}{x^{2n}}\right) = \frac{1}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n-2}} + \ldots + \frac{1}{x^2} +$$
$$+ 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + 2n - 1 = \frac{1}{x^{2n}} \cdot \frac{(x^2)^{2n+1} - 1}{x^2 - 1} +$$
$$+ 2n - 1 = \frac{x^{4n+2} - 1}{x^{2n}(x^2 - 1)} + 2n - 1.$$

339. $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)^2 - x^n =$

$$= \frac{(x^{n+1} - 1)^2 - x^n(1-x)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^{2n+2} - 2x^{n+1} + 1 - x^n + 2x^{n+1} - x^{n+2}}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1} = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 +$$
$$+ x + x^2 + \ldots + x^{n+1}).$$

340. Дано $S = a_1 + a_2 + \ldots + a^n$ и $S_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a^n}$. Нужно найти $\sigma = a_1 a_2 \ldots a_n$. Пользуясь тем, что в конечной гео-

метрической прогрессии произведение членов, равноотстоящих от концов, равно произведению крайних членов (задача 329), получим

$$\sigma^2 = (a_1 a_2 \ldots a_n)^2 = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \ldots (a_n a_1) = (a_1 a_n)^n.$$

С другой стороны, на основании того же свойства можно написать

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 a_n}{a_n} + \frac{a_2 a_{n-1}}{a_{n-1}} + \ldots + \frac{a_n a_1}{a_1} =$$

$$= a_1 a_n \left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a_1} \right) = a_1 a_n S_1.$$

Поэтому

$$a_1 a_n = \frac{S}{S_1}, \quad \sigma^2 = \left(\frac{S}{S_1} \right)^n, \quad \sigma = \left(\frac{S}{S_1} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

341. $S = x + (x^2 + x^2) + (x^3 + 2x^3) + \ldots + [x^n + (n-1)x^n] =$

$$= x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x(x + 2x^2 + \ldots + nx^n) - nx^{n+1};$$

$$S = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1} + Sx - nx^{n+1},$$

$$(x - 1)S = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{x - 1};$$

$$S = \frac{x}{(x-1)^2}[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1].$$

342. Не нужно. Это определение суммы бесконечно убывающей прогрессии, принятое в курсе элементарной математики, а определение не доказывают.

343. Если последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ есть геометрическая прогрессия со знаменателем q, то последовательность $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ является также геометрической прогрессией, но со знаменателем q^2. Поэтому, пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, можем написать следующие два уравнения:

$$\frac{a_1}{1 - q} = 9; \quad \frac{a_1^2}{1 - q^2} = 40{,}5.$$

Подставляя значение $a_1 = 9(1 - q)$, найденное из первого уравнения, во второе, получим:

$$\frac{81(1-q)^2}{1 - q^2} = 40{,}5, \quad \frac{2(1-q)}{1+q} = 1, \quad 1 + q = 2(1 - q),$$

$$q = \frac{1}{3}, \quad a_1 = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 9 - 3 = 6.$$

344. Если $a_1, a_2, a_3, \ldots$ есть геометрическая прогрессия со знаменателем q, то $a_1^3, a_2^3, a_3^3, \ldots$ тоже геометрическая прогрес-

сия, но со знаменателем q^3. Поэтому можем написать следующие два уравнения для определения первого члена прогрессии и ее знаменателя:

$$\frac{a_1}{1-q}=3;\quad \frac{a_1^3}{1-q^3}=\frac{108}{13}.$$

Найдя из первого уравнения $a_1=3(1-q)$ и подставив это значение a_1 во второе, получим:

$$\frac{27(1-q)^3}{1-q^3}=\frac{108}{13},\quad \frac{(1-q)^2}{1+q+q^2}=\frac{4}{13},$$

$$13(1-2q+q^2)=4(1+q+q^2),\quad 3q^2-10q+3=0,$$

$$q=\frac{5\pm 4}{3};\quad q_1=\frac{1}{3};\quad a_1=3\left(1-\frac{1}{3}\right)=3-1=2.$$

Значение $q_2=3>1$ не подходит, так как прогрессия убывающая. Второй и третий члены прогрессии будут $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{9}$.

345. Если последовательность a_1, a_2, a_3, a_4, ... есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем q, то последовательности a_1, a_3, ... и a_2, a_4, ... также будут бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями со знаменателями q^2. Поэтому можем написать следующие два уравнения:

$$\frac{a_1}{1-q^2}=36;\quad \frac{a_2}{1-q^2}=12.$$

Найдем из первого уравнения $a_1=36(1-q^2)$ и подставим это значение во второе уравнение. Учитывая, что $a_2=a_1q$, получим:

$$36q=12,\quad q=\frac{1}{3},\quad a_1=36\left(1-\frac{1}{9}\right)=36-4=32,$$

а искомая прогрессия будет такая: $32,\ \frac{32}{3},\ \frac{32}{9},\ \ldots$

346. Если обозначить знаменатель прогрессии, сумму которой нужно найти, через q, то прогрессия может быть записана так: $1,\ q,\ q^2,\ \ldots$ Так как второй член прогрессии меньше суммы смежных с ним членов 1 и q^2 в $2\frac{1}{6}$ раза, то получаем уравнение $1+q^2=\frac{13}{6}q$, решив которое, найдем, что $q_1=\frac{2}{3}$; $q_2=\frac{3}{2}$. Второй корень не годится, так как при $q=\frac{3}{2}$ прогрессия не будет убывающей. Находим сумму прогрессии: $S=\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$.

347. Обозначим знаменатель искомой прогрессии q. По условию любой член прогрессии в 3 раза больше суммы всех следующих за ним членов прогрессии. В частности, первый член равен утроенной сумме всех членов прогрессии без первого. Но искомая прогрессия имеет такой вид: $1, q, q^2, \ldots$ Следовательно, сумма всех членов, начиная со второго, есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом q и знаменателем q, которая равна $\frac{q}{1-q}$. Отсюда получаем уравнение $1 = 3 \cdot \frac{q}{1-q}$, решив которое, найдем $q = \frac{1}{4}$. Искомая прогрессия имеет вид $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

348. Обозначим первый, второй, третий и четвертый члены через a_1, a_2, a_3 и a_4, а знаменатель прогрессии — через q. Тогда будем иметь: $a_2 = a_1 q$; $a_3 = a_1 q^2$; $a_4 = a_1 q^3$. По условию задачи $a_1 + a_4 = 1{,}5\,(a_2 + a_3)$ или $a_1 + a_1 q^3 = 1{,}5\,(a_1 q + a_1 q^2)$. Но $a_1 \neq 0$, в противном случае прогрессия имела бы вид $0, 0, 0, \ldots$, что не может быть, так как сумма первых четырех членов не равна нулю. Разделив равенство на a_1, получим $1 + q^3 = 1{,}5q\,(1 + q)$. Решаем это уравнение:

$$2\,(1 + q^3) = 3q\,(1 + q),\quad 2\,(1 + q)\,(1 - q + q^2) - 3q\,(1 + q) = 0,$$

$$(1 + q)\,(2q^2 - 5q + 2) = 0.$$

Но $1 + q \neq 0$, иначе прогрессия не была бы убывающей ($q = -1$), поэтому $2q^2 - 5q + 2 = 0$. Отсюда находим:

$$q = \frac{5 \pm 3}{4};\quad q_1 = \frac{1}{2};\quad q_2 = 2.$$

Второе значение не даст убывающей прогрессии и должно быть отброшено. Остается только $q = \frac{1}{2}$. Из условия $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$, найдем a_1. Действительно,

$$S_4 = \frac{a_1\,(1 - q^4)}{1 - q} = \frac{a_1\left(1 - \frac{1}{16}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 15,$$

$$\frac{15}{8}\,a_1 = 15,\quad a_1 = 8.$$

Отсюда сумма прогрессии $S = \dfrac{8}{1 - \frac{1}{2}} = 16.$

349. По условию задачи имеем $S_6 = \frac{7}{8}S$. Если обозначить пер-

вый член прогрессии через $a_1 \neq 0$, а знаменатель прогрессии через q, то последнее равенство запишется так: $\frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{7}{8} \cdot \frac{a_1}{1-q}$. Сокращая на $\frac{a_1}{1-q} \neq 0$, получим $1 - q^6 = \frac{7}{8}$. Отсюда $q = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

350. Обозначим разность этой арифметической прогрессии буквой d. Тогда первый, пятый и одиннадцатый члены этой прогрессии запишутся так: $24,\ 24 + 4d,\ 24 + 10d$. Так как они образуют геометрическую прогрессию, то имеет место соотношение

$$(24 + 4d)^2 = 24(24 + 10d).$$

Решаем полученное уравнение:

$$(6 + d)^2 = 3(12 + 5d),\ 36 + 12d + d^2 = 36 + 15d,$$
$$d^2 = 3d;\ d_1 = 0,\ d_2 = 3.$$

Получаются две прогрессии:

$$24,\ 24,\ 24,\ 24,\ 24,\ 24,\ 24,\ 24,\ 24,\ 24,\ 24$$

и

$$24,\ 27,\ 30,\ 33,\ 36,\ 39,\ 42,\ 45,\ 48,\ 51,\ 54.$$

351. Девятый член a_9 арифметической прогрессии определится из соотношения $\frac{1 + a_9}{2} \cdot 9 = 369$. Из него находим $a_9 = 81$. Знаменатель q геометрической прогрессии определится из равенства $81 = 1 \cdot q^8$. Отсюда находим $q^2 = 3$ Седьмой член геометрической прогрессии равен $a_1 q^6 = 27$.

352. Обозначим первое, второе и третье числа через a_1, a_2 и a_3 Эти три числа составляют геометрическую прогрессию, и поэтому можно написать, что $a_2^2 = a_1 a_3$ Числа a_1, $a_2 + 8$, a_3 составляют арифметическую прогрессию, и поэтому можно написать, что $a_2 + 8 = \frac{a_1 + a_3}{2}$. Наконец, числа a_1, $a_2 + 8$, $a_3 + 64$ составляют геометрическую прогрессию, и поэтому можно написать, что $(a_2 + 8)^2 = a_1(a_3 + 64)$. Таким образом, имеем систему уравнений:

$$a_2^2 = a_1 a_3,\ a_2 + 8 = \frac{a_1 + a_3}{2},\ (a_2 + 8)^2 = a_1(a_3 + 64).$$

Произведем умножение в третьем уравнении

$$a_2^2 + 16a_2 + 64 = a_1 a_3 + 64a_1.$$

Но на основании первого уравнения $a_2^2 = a_1 a_3$; поэтому предыдущее уравнение принимает вид $16a_2 + 64 = 64a_1$. Отсюда $a_2 = 4a_1 - 4$. Подставляем найденное значение a_2 во второе уравнение системы. Получаем:

$$4a_1 - 4 + 8 = \frac{a_1 + a_3}{2};\ 4a_1 + 4 = \frac{a_1 + a_3}{2}.$$

Отсюда $a_3 = 8 + 7a_1$. Найденные выражения для a_2 и a_3 через a_1 подставляем в первое уравнение системы и решаем его относительно a_1. Получаем:

$$(4a_1 - 4)^2 = a_1(8 + 7a_1);\ 9a_1^2 - 40a_1 + 16 = 0;\ a_1 = \frac{20 \pm 16}{9}.$$

Если $a_1 = \frac{20 + 16}{9} = 4$, то $a_2 = 4a_1 - 4 = 12$; $a_3 = 8 + 7a_1 = 36$.

Если $a_1 = \frac{20 - 16}{9} = \frac{4}{9}$, то $a_2 = 4a_1 - 4 = -\frac{20}{9}$; $a_3 = 8 + 7a_1 = \frac{100}{9}$.

Итак, возможны две тройки чисел: 1) 4, 12 и 36, 2) $\frac{4}{9}$, $-\frac{20}{9}$ и $\frac{100}{9}$.

353. Обозначим искомое число буквой x, а другое, вставленное между числами 3 и x, буквой y. Три числа 3, y и x образуют арифметическую прогрессию. Поэтому можно написать, что $y = \frac{3 + x}{2}$. Числа 3, $y - 6$ и x образуют геометрическую прогрессию, и поэтому можно написать, что $(y - 6)^2 = 3x$. Заменив в этом уравнении неизвестное y на основании предыдущего равенства, получим

$$\left(\frac{3 + x}{2} - 6\right)^2 = 3x.$$

Решаем это уравнение:

$$\left(\frac{x - 9}{2}\right)^2 = 3x,\ (x - 9)^2 = 12x,\ x^2 - 30x + 81 = 0;\ x_1 = 27,\ x_2 = 3.$$

Во втором случае все три числа одинаковы, так что они образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной нулю. После уменьшения второго числа на 6 получим такие три числа: 3, — 3, 3. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным — 1.

354. Обозначим первое, второе и третье числа через x, y и z. По условию задачи имеем $x + y + z = 114$. Так как эти числа образуют геометрическую прогрессию, то имеет место равенство $y^2 = xz$. С другой стороны, так как эти числа являются соответственно первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии, то, обозначая разность прогрессии буквой d, получим $y = x + 3d$, $z = x + 24d$. Подставляем эти значения y и z в полученные выше уравнения. Это приводит к следующей системе уравнений: $x + (x + 3d) + (x + 24d) = 114$; $(x + 3d)^2 = x(x +$

$+ 24d$), которая после упрощений принимает такой вид: $x + 9d = 38$; $d^2 = 2dx$. Решив ее, найдем: $x_1 = 38$, $d_1 = 0$ и $x_2 = 2$, $d_2 = 4$. Итак, возможны два решения: 38, 38, 38 и 2, 14, 98.

355. Обозначим искомое число минут через x. Второе тело прошло за это время путь $6x$ *м*. Первое тело проходило в каждую минуту, начиная со второй, на 0,5 *м* больше, чем в предыдущую, и, следовательно, общий пройденный им путь будет равен сумме x членов арифметической прогрессии, первый член которой есть 1, а разность 0,5, т. е. $\frac{2 + 0{,}5(x-1)}{2} x$. Так как тела встретились, то получаем следующее уравнение:

$$6x + \frac{2 + 0{,}5(x-1)}{2} x = 117.$$

Отсюда

$$x^2 + 27x - 468 = 0; \quad x = 12$$

(отрицательный корень отброшен).

356. По свойству арифметической прогрессии должно быть $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, а по свойству геометрической — $a_2^2 = a_1 a_3$. Сравнивая значения a_2^2, взятые из этих равенств, получаем

$$\left(\frac{a_1 + a_3}{2}\right)^2 = a_1 a_3.$$

Отсюда находим:

$$\frac{(a_1 + a_3)^2 - 4a_1a_3}{4} = 0; \quad \frac{(a_1 - a_3)^2}{4} = 0,$$

что дает $a_1 = a_3$. Но тогда и $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = a_1 = a_3$.

Это возможно лишь в том случае, когда разность арифметической прогрессии равна 0, а знаменатель геометрической 1. Если бы эти числа были первым, вторым и третьим членами арифметической прогрессии и первым, третьим и вторым членами геометрической, то это возможно и при неравных a_1, a_2 и a_3. Например:

$$\div 2, \frac{1}{2}, -1 \left(d = -\frac{3}{2}\right); \; \because 2, -1, \frac{1}{2} \left(q = -\frac{1}{2}\right).$$

357. Должно быть $b^2 = 4a$ и $2a = b + 4$. Отсюда:

$$b^2 = 2(b + 4); \; b^2 - 2b - 8 = 0; \; b_1 = 4, \; b_2 = -2; \; a_1 = 4, \; a_2 = 1.$$

При $a = b = 4$ делимое будет иметь вид

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + dx + l = 4x^2(x^2 + x + 1) + dx + l.$$

Следовательно, для делимости этого многочлена на $x^2 + x + 1$ необходимо и достаточно, чтобы было $d = l = 0$. В этом случае

частное будет равно $4x^2$. При $a=1$ и $b=-2$ делимое имеет вид $x^4-2x^3+4x^2+dx+l$ и частное от деления его на x^2+x+1 будет многочлен второй степени вида x^2+mx+n. Поэтому можно написать

$$x^4-2x^3+4x^2+dx+l=(x^2+x+1)(x^2+mx+n)=x^4+$$
$$+(m+1)x^3+(m+n+1)x^2+(m+n)x+n.$$

Приравнивая коэффициенты при x^3 из левой и правой частей равенства, а затем при x^2, придем к следующей системе:

$$m+1=-2,\ m+n+1=4.$$

Отсюда $m=-3$, $n=6$, а искомое частное в этом случае будет x^2-3x+6.

358. Дано, что обе прогрессии возрастающие, т. е. что $d=a_2-a_1>0$, $q=\frac{a_2}{a_1}>1$. Нужно доказать, что $a_n<b_n$ при $n>2$.

Доказательство. $a_n=a_1+d(n-1)=a_1+$

$$+(a_2-a_1)(n-1)=a_1\left[1+\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)(n-1)\right]=$$

$$=a_1[1+(q-1)(n-1)]=a_1[1+(q-1)\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n-1}]<$$

$$<a_1[1+(q-1)(q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots+q+1)]=a_1[1+$$
$$+(q^{n-1}-1)]=a_1q^{n-1}=b_n.$$

V.

ЛОГАРИФМЫ

а) ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

359. По определению логарифма.

360. Если $a>1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, т. е. $\log_a 2<\log_a 3$. Если $0<a<1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, т. е. $\log_a 2>\log_a 3$.

361. Пусть $\log_b a=x$. Тогда по определению логарифма $b^x=a$. Логарифмируя это равенство, получим $x\log_a b=\log_a a$, а так как $x=\log_b a$ и $\log_a a=1$, то получим окончательно

$$\log_b a\log_a b=1.$$

362. Пусть $\log_b a=x$ и $\log_c a=y$. Тогда по определению логарифма имеем $b^x=a$ и $c^y=a$. Отсюда $b^x=c^y$. Логарифмируя последнее равенство, получим $x\log_c b=y\log_c c=y$. Подставляем сюда

вместо x и y их выражения $\log_b a \log_c b = \log_c a$. Отсюда $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

363. Так как под знаком логарифма должна находиться положительная величина, то формула $\log a^2 = 2\log(-a)$ верна, когда $-a > 0$ или $a < 0$. Следует также иметь в виду, что формула $\log a^2 = 2\log a$ верна лишь при $a > 0$. И только формула $\log a^2 = 2\log|a|$ верна при всяком $a \neq 0$.

364. Из условия

$$13ab = 4a^2 + 9b^2$$

найдем, что

$$\left(\frac{2a + 3b}{5}\right)^2 = ab.$$

Логарифмируя последнее, найдем

$$2\log\frac{2a + 3b}{5} = \log a + \log b.$$

Отсюда и следует доказываемое равенство.

365. Из равенства $a^2 + b^2 = 7ab$ следует, что

$$(a + b)^2 = 9ab, \quad \left(\frac{a + b}{3}\right)^2 = ab.$$

Прологарифмировав последнее равенство, получим то, что требуется доказать.

366. Так как $a^2 = (c + b)(c - b)$, то, логарифмируя последнее равенство сперва по основанию $c + b$, а потом по основанию $c - b$, получим

$$2\log_{c+b} a = 1 + \log_{c+b}(c - b) \text{ и } 2\log_{c-b} a = 1 + \log_{c-b}(c + b).$$

Перемножаем эти равенства и производим преобразования:

$$4\log_{c+b} a \log_{c-b} a = 1 + \log_{c+b}(c - b) + \log_{c-b}(c + b) + \log_{c+b}(c - b)\log_{c-b}(c + b) = [1 + \log_{c+b}(c - b)] + [1 + \log_{c-b}(c + b)] = 2\log_{c-b} a + 2\log_{c+b} a.$$

367. Пользуясь соотношением $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (см. задачу 362), получим

$$\log_8 9{,}8 = \frac{\log_{10} 9{,}8}{\log_{10} 8} = \frac{\log_{10}(49 \cdot 0{,}2)}{3\log_{10} 2} = \frac{2\log_{10} 7 + \log_{10} 2 - 1}{3\log_{10} 2} = \frac{2b + a - 1}{3a}.$$

368. Пользуясь формулой $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (см. задачу 362), получим

$$\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = \frac{\log_a N}{\frac{\log_a N}{\log_a (ab)}} = \log_a (ab) = 1 + \log_a b.$$

369. Пользуясь соотношениями $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (см. задачу 361) и $a^{\log_a x} = x$ (задача 359), получим

$$a^{\frac{\log_b (\log_b a)}{\log_b a}} = \left(a^{\frac{1}{\log_b a}}\right)^{\log_b (\log_b a)} = (a^{\log_a b})^{\log_b (\log_b a)} =$$
$$= b^{\log_b (\log_b a)} = \log_b a.$$

370. Положим $\log_b a = x$. Тогда по определению логарифма $b^x = a$. Возведя последнее равенство в степень n, получим $b^{nx} = a^n$ или $(b^n)^x = a^n$. Последнее же означает, что $\log_{b^n} a^n = x$, а так как $x = \lg_b a$, то $\lg_{b^n} a^n = \lg_b a$.

371. $\lg_4 3 = \lg_{4^2} 3^2 = \lg_{16} 9$ (см. задачу 370).

372. Пользуясь формулами, доказанными в задачах 370 и 361, получим

$$\lg_{\sqrt{3}} 8 = \lg_3 64 = \lg_3 4^3 = 3\lg_3 4 = 3\lg_3 \frac{12}{3} =$$

$$= 3(\lg_3 12 - \lg_3 3) = 3\left(\frac{1}{\lg_{12} 3} - 1\right) = 3\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{3(1-a)}{a}.$$

373. Воспользуемся формулой $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ (см. задачу 361). Получим

$$\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\log_x (a_1 a_2 \ldots a_n)} = \frac{1}{\log_x a_1 + \log_x a_2 + \ldots + \log_x a_n} =$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

374. Логарифмируя данные равенства, получим

$$(1 - \log_{10} x)\log_{10} y = 1, \quad (1 - \log_{10} y)\log_{10} z = 1.$$

Отсюда

$$\log_{10} x = 1 - \frac{1}{\log_{10} y} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\log_{10} z}} = \frac{1}{1 - \log_{10} z}.$$

Поэтому $x = 10^{\frac{1}{1-\log_{10} z}}$.

375. Так как $\log_b a = \dfrac{1}{\log_b a}$ и $b = \sqrt{ac}$, то

$$\log_b x = \frac{1}{\log_x b} = \frac{1}{\log_x \sqrt{ac}} = \frac{2}{\log_x a + \log_x c} = \frac{2\log_a x \log_c x}{\log_a x + \log_c x}.$$

Подставляя это значение $\log_b x$ в левую часть доказываемого равенства, получим

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x(\log_a x + \log_c x) - 2\log_a x \log_c x}{2\log_a x \log_c x - \log_c x(\log_a x + \log_c x)} =$$
$$= \frac{(\log_a x)^2 - \log_a x \log_c x}{\log_a x \log_c x - (\log_c x)^2} = \frac{\log_a x(\log_a x - \log_c x)}{\log_c x(\log_a x - \log_c x)} = \frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

376. По определению арифметической прогрессии можем записать

$$\log_m x - \log_k x = \log_n x - \log_m x.$$

Пользуясь формулой $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ (см. задачу 362), преобразуем написанное выше равенство

$$\frac{\log_k x}{\log_k m} - \log_k x = \frac{\log_k x}{\log_k n} - \frac{\log_k x}{\log_k m}.$$

Сокращая на $\log_k x$, приводя подобные члены и потенцируя, получим:

$$\frac{2}{\log_k m} = 1 + \frac{1}{\log_k n}, \quad 2\log_k n = \log_k m(\log_k n + 1),$$

$$\log_k n^2 = \log_k m \log_k (nk), \quad \log_k n^2 = \log_k (nk)^{\log_k m}, \quad n^2 = (nk)^{\log_k m}.$$

Если $\log_k x = 0$ (на этот множитель мы сокращали), т. е. если $x = 1$, то числа $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ дают арифметическую прогрессию 0, 0, 0 при любых k, m, n, и, таким образом, необходимость соотношения $n^2 = (kn)^{\log_k m}$ в этом случае отпадает.

377. Если $x = 1$, то числа $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ образуют арифметическую прогрессию 0, 0, 0 при любых k, m, n, в частности, и при таких, при которых выполняется данное в задаче соотношение. Будем теперь считать, что $x \neq 1$ Прологарифмировав данное равенство, получим:

$$\log_k (kn)^{\log_k m} = \log_k n^2, \quad \log_k m(1 + \log_k n) = 2\log_k n,$$

$$\frac{1 + \log_k n}{\log_k n} = \frac{2}{\log_k m}, \quad \frac{1}{\log_k n} + 1 = \frac{2}{\log_k m}.$$

Умножим последнее равенство на $\log_k x \neq 0$. Получим

$$\frac{\log_k x}{\log_k n} + \log_k x = 2 \cdot \frac{\log_k x}{\log_k m}.$$

Пользуясь формулой

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b},$$

найдем, что

$$\log_n x + \log_k x = 2\log_m x \text{ или } \log_k x - \log_m x = \log_m x - \log_n x,$$

а это и требовалось доказать.

378. При делении неравенства $3\log_{10}\frac{1}{2} < 2\log_{10}\frac{1}{2}$ на $\log_{10}\frac{1}{2}$ придем к неравенству противоположного смысла ($3 > 2$), так как $\log_{10}\frac{1}{2} < 0$.

б) ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

379—381. В первых уравнениях $P(x)$ и $Q(x)$ должны быть положительны, а во вторых они могут быть одного знака (в задаче 379 они могут также быть равными нулю). Таким образом, рассматриваемые пары уравнений в общем случае не равносильны.

382. В первом уравнении должно быть $P(x) > 0$, а во втором $P(x)$ может быть любым вещественным числом, не равным нулю. В общем случае эти уравнения не равносильны.

383. Если $x = y$, то и $a^x = a^y$. Однако a^x может быть равно a^y, когда $x \neq y$, если $a = 1$. Таким образом, если $a \neq 1$, то уравнения $a^x = a^y$ и $x = y$ равносильны.

384. Решаем первое уравнение: $x^2 - 1 = 8$, $x^2 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Оба корня удовлетворяют этому уравнению. Подставляем теперь $x = 3$ и $x = -3$ во второе уравнение и убеждаемся, что $x = -3$ ему не удовлетворяет. Следовательно, уравнения не равносильны.

385. Потому что уравнение

$$2\log(x - 1) = 2\log 3$$

не эквивалентно данному, так как

$$\log(x - 1)^2 = 2\log|x - 1|.$$

Оно эквивалентно данному лишь при $x > 1$, а при $x < 1$ такому:

$$2\log(1 - x) = 2\log 3.$$

Решив последнее, найдем $x = -2$.

386—424. Указание. I. При решении логарифмических и показательных уравнений часто приходится логарифмировать и потен-

цировать обе части уравнения. Указанные операции могут привести к уравнениям, не равносильным данным. Это следует иметь в виду, чтобы не потерять корни и не приобрести посторонние. Логарифмирование может привести к потере решений, а потенцирование к приобретению посторонних (см. задачи 379—385). Посторонние могут быть выявлены проверкой (испытанием). Чтобы не потерять решения, нужно стараться применять такие операции, которые бы приводили к уравнениям, равносильным данным, или, в крайнем случае, имели бы среди своих решений — решения данного.

II. В том случае, когда неизвестное входит и в основание и в показатель (например, x^x, $(x+1)^{\log y}$ и т. п.), допустимыми значениями букв могут быть лишь такие, при которых основание положительно. Если же показатель не может быть отрицательным, то основание может обращаться и в нуль. Например, в выражении $(1+y)^x$ должно быть $y > -1$, а если $x > 0$, то $y \geqslant -1$

386. $\left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2 - \frac{3}{2}\log_x 5 + \frac{5}{4} = 0$, $\log_x^2 5 - 6\log_x 5 + 5 = 0$,

$$\log_x 5 = 3 \pm 2;\ \log_x 5 = 5,\ x^5 = 5,$$

$$x_1 = \sqrt[5]{5};\ \log_x 5 = 1,\ x_2 = 5.$$

387. $3\sqrt{\lg x} - \lg x = 2$; $\lg x - 3\sqrt{\lg x} + 2 = 0$,

$$\sqrt{\lg x} = \frac{3 \pm 1}{2};\ \sqrt{\lg x} = 2,\ \lg x = 4,\ x_1 = 10^4 = 10\,000;$$

$\sqrt{\lg x} = 1$, $\lg x = 1$, $x_2 = 10$. Оба корня удовлетворяют уравнению.

388. Так как левая часть уравнения положительная, то должна быть положительной и правая часть, что будет иметь место лишь тогда, когда $\log_x \sqrt{5} < 0$ или $0 < x < 1$. Предполагая это условие выполненным, возведем в квадрат данное уравнение. Получим новое уравнение

$$\frac{3}{2}\log_x 5 + 3 = \frac{3}{2}\log_x^2 5 \text{ или } \log_x^2 5 - \log_x 5 - 2 = 0,$$

которое равносильно данному (при условии $0 < x < 1$). Решаем его:

$$\log_x 5 = \frac{1 \pm 3}{2};\ \log_x 5 = -1,\ x_1 = \frac{1}{5};$$

$$\log_x 5 = 2,\ x_2 = \sqrt{5}.$$

Второй корень посторонний, так как $\sqrt{5} > 1$.

389. Логарифмируем обе части уравнения. Получим следующее уравнение, равносильное данному:

$$(\log_5 x - 1)\log_5 \sqrt{x} = \log_5 5 \text{ или } \log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0.$$

Решаем его:

$$\log_5 x = \frac{1 \pm 3}{2};\ \log_5 x = 2,\ x = 5^2 = 25;\ \log_5 x = -1,$$

$$x_2 = \frac{1}{5}.$$

Замечание. Равносильность данного уравнения и полученного логарифмированием данного следует из того, что основание степени $\sqrt{x}$ предполагается положительным. Вообще, уравнение $u^v = w$, где $u > 0$, как можно показать, равносильно уравнению $v \log_a u = \log_a w$.

390. Логарифмируем обе части уравнения. Получим уравнение, равносильное данному (см. задачу 389), которое затем решаем, как биквадратное:

$$(2\lg^3 x - 1{,}5\lg x)\lg x = \lg\sqrt{10},\ \ 2\lg^4 x - \frac{3}{2}\lg^2 x = \frac{1}{2},$$

$$4\lg^4 x - 3\lg^2 x - 1 = 0;\ \lg^2 x - \frac{3+5}{8} = 1,\qquad \lg x = \pm 1,$$

$$x_1 = 10,\quad x_2 = \frac{1}{10}.$$

391. Делаем сперва алгебраические преобразования в правой части уравнения, затем логарифмируем обе части:

$$x^{\lg^2 x + 3\lg x + 3} = \frac{2}{\frac{\sqrt{1+x}+1}{x} - \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}},$$

$$x^{\lg^2 x + 3\lg x + 3} = x,\ (\lg^2 x + 3\lg x + 3)\lg x = \lg x,$$

$$\lg x\,(\lg^2 x + 3\lg x + 2) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно данному (задача 389). Решая его относительно $\lg x$, получим

$$\lg x = 0;\ \lg x = -1;\ \lg x = -2.$$

Отсюда

$$x_1 = 1;\ x_2 = 0{,}1;\ x_3 = 0{,}01.$$

392. Так как должно быть $-x > 0$, то $\sqrt{x^2} = -x$ и данное уравнение равносильно следующему:

$$\sqrt{2\lg(-x)} = \lg(-x).$$

Возведя последнее уравнение в квадрат, получим

$$2\lg(-x) = \lg^2(-x).$$

Решаем его:

$$\lg(-x)[2-\lg(-x)]=0;\ \lg(-x)=0,\ \lg(-x)=2;$$
$$x_1=-1,\ x_2=-100.$$

Оба корня удовлетворяют данному уравнению.

393. Данное уравнение равносильно такому: $\log_2|x|=1$. Отсюда $|x|=2$; $x_1=2$, $x_2=-2$.

394. Уравнение равносильно следующему:

$$2\log_2|x+1|+\log_2|x+1|=6.$$

Отсюда:

$$3\log_2|x+1|=6,\ \log_2|x+1|=2,\ |x+1|=4,$$
$$x+1=\pm 4;\ x_1=3,\ x_2=-5.$$

395. Так как $a^{\log_a z}=z$, то уравнение равносильно такому: $(x-2)^2=9$ (при условии $x>0$, $x\neq 2$). Отсюда:

$$x-2=+3,\ x=5.$$

396. Воспользовавшись формулой $\log_b a=\log_{b^n} a^n$ (см. задачу 370), получим

$$x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)}=x^{\log_x(x-2)^2} \text{ и } x^{\log_x(x-2)^2}=9,$$

т. е. уравнение задачи 395. Следовательно, $x=5$.

397. Так как $a^{\log_a 4}=a^{\log_a 2}=2$,

то

$$x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}=x^{\log_{\sqrt{x}}\sqrt{x^2-x}}=x^{\log_x(x^2-x)}=x^2-x.$$

Поэтому уравнение принимает вид

$$2=x^2-x \text{ или } x^2-x-2=0.$$

Решив его, найдем $x=2$ ($x=-1$) — посторонний корень.

398. Так как в правой части отрицательное число, а корень, находящийся в левой части, — положительное число, то множитель $\log_5 x$ в левой части должен быть отрицательным. Предполагая, что условие $\log_5 x<0$ выполнено, возведем обе части уравнения в квадрат. Получим следующее уравнение, равносильное данному:

$$\log_x\sqrt{5x}\,\log_5^2 x=1.$$

Далее преобразуем левую часть полученного уравнения, используя формулу

$$\log_b a\log_a b=1.$$

Будем иметь:

$$\frac{1}{2}(\log_x 5 + \log_x x)\log_5^2 x = 1,\ (\log_x 5 + 1)\log_5^2 x = 2,$$

$$\log_x 5 \log_5^2 x + \log_5^2 x = 2,\ \log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение относительно $\log_5 x$. Получаем

$$\log_5 x = \frac{-1-3}{2} = -2,\ x = 5^{-2} = \frac{1}{25}.$$

399. Преобразуем обе части уравнения, используя при этом формулу

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

Будем иметь:

$$2 \cdot \frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 (3x)} = \frac{1}{\log_3 (9\sqrt{x})},\quad 2\log_3 (9\sqrt{x}) =$$

$$= \log_3 x \log_3 (3x),\quad 2(\log_3 9 + \log_3 \sqrt{x}) = \log_3 x (\log_3 3 + \log_3 x),$$

$$2(2 + \frac{1}{2}\log_3 x) = \log_3 x (1 + \log_3 x),\quad 4 + \log_3 x =$$

$$= \log_3 x + \log_3^2 x,\quad \log_3^2 x = 4.$$

Отсюда:

$$\log_3 x = \pm 2,\ x_1 = 9,\ x_2 = \frac{1}{9}.$$

Каждое из примененных здесь преобразований обратимо, т. е. однозначно выполнимо в обратном порядке. Это гарантирует равносильность всех полученных уравнений и данного уравнения. По этой причине нет надобности испытывать найденные значения x_1 и x_2 — они будут корнями данного, причем потери корней не произошло.

400. Преобразуем данное уравнение, пользуясь соотношением

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

Получим:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \log_a x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\log_a x} + 1\right)} +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x - 1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\log_a x} - 1\right)} = a;$$

$$\sqrt{\frac{(\log_a x + 1)^2}{4\log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x - 1)^2}{4\log_a x}} = a.$$

Так как числители подкоренных выражений положительны, а корни — арифметические, то должны быть и знаменатели положительными. Это значит, что должно быть $\log_a x > 0$ и $\log_a x + 1 > 1$, а следовательно, данное уравнение эквивалентно следующему:

$$\frac{\log_a x + 1}{2\sqrt{\log_a x}} + \frac{|\log_a x - 1|}{a\sqrt{\log_a x}} = a.$$

Из него видим, что $a > 1$. Действительно, второе слагаемое левой части положительно, а первое больше единицы, так как

$$\frac{\log_a x + 1}{2\sqrt{\log_a x}} + \frac{2\sqrt{\log_a x} + (\sqrt{\log_a x} - 1)^2}{2\sqrt{\log_a x}} =$$

$$= 1 + \frac{(\sqrt{\log_a x} - 1)^2}{2\sqrt{\log_a x}} > 1.$$

Следовательно, если $a < 1$, то данное уравнение не имеет решений. Если $\log_a x > 1$, то уравнение имеет вид

$$\frac{\log_a x + 1 + \log_a x - 1}{2\sqrt{\log_a x}} = a \quad \text{или} \quad \sqrt{\log_a x} = a.$$

Отсюда: $\log_a x = a^2 > 1$; $x_1 = a^{a^2}$. Если $0 < \log_a x < 1$, то уравнение приведется к виду $\log_a x = \frac{1}{a^2} < 1$, откуда $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$. Очевидно, x_1 и x_2 являются корнями данного уравнения, и других оно не имеет.

401. Пользуемся формулой $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (см. задачу 362):

$$\log_a x \frac{\log_a c}{\log_c b}\left(1 + \frac{1}{\log_a c}\right) = \frac{\log_a x}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a c} \log_a c,$$

$$\log_a x (\log_a c + 1) = (\log_a x)^2. \text{ а) } \log_a x = 0, \; x_1 = 1;$$

$$\text{б) } \log_a c + 1 = \log_a x, \; \log_a x = \log_a (ac), \; x_2 = ac.$$

402. На основании соотношения $\log_b a = \log_{b^n} a^n$ (см. задачу 370) данное уравнение можно записать так:

$$\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^{-1} = 6.$$

Отсюда:

$$\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6; \; \log_3 x = 3; \; x = 3^3 = 27.$$

403. $\log_8 x + (\log_8 x)^2 + (\log_8 x)^3 + \ldots$ есть бесконечная геометрическая прогрессия с первым членом и знаменателем, равными $\log_8 x$, и раз она по условию имеет сумму, то она убывающая. Поэтому,

пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$\frac{\log_8 x}{1-\log_8 x}=\frac{1}{2}.$$

Решаем это уравнение:

$$2\log_8 x=1-\log_8 x,\quad \log_8 x=\frac{1}{3},\quad x=8^{\frac{1}{3}}=2.$$

404. Положив $\sqrt{x+1}=y\geqslant 0$ и сделав некоторые упрощения, получим

$$\log(y+1)=\log(y^2-41).$$

Отсюда:

$$y+1=y^2-41,\quad y^2-y-42=0;\ y_1=7,\ y_2=-6.$$

Второй корень отбрасываем, так как $y_2<0$. Используя $y_1=7$, найдем $\sqrt{x+1}=7$, $x=48$. Полученный корень удовлетворяет данному уравнению.

405. Разделим все члены уравнения на $9^{-\frac{1}{x}}$. Получим:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{x}}+\left(\frac{6}{9}\right)^{-\frac{1}{x}}=1,\quad \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}\right]^2+\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}-1=0,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Но знак минус перед радикалом не годится, поэтому

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\frac{1}{x}\log\frac{2}{3}=\log\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad x=\frac{\log 3-\log 2}{\log(\sqrt{5}-1)-\log 2}.$$

406. Положим $x+\sqrt{x^2-2}=y$. Тогда уравнение запишется так:

$$4^y-5\cdot 2^{y-1}=6;\quad 2^{2y}-\frac{5}{2}\cdot 2^y-6=0;$$

$$2\cdot 2^{2y}-5\cdot 2^y-12=0.$$

Решая полученное уравнение как квадратное относительно $2^y > 0$, найдем:

$$2^y = \frac{5+11}{4} = 4, \quad 2^y = 2^2, \quad y = 2; \quad x + \sqrt{x^2-2} = 2,$$

$$x^2 - 2 = (2-x)^2, \quad x^2 - 2 = x^2 - 4x + 4, \quad 4x = 6, \quad x = \frac{3}{2}.$$

407. Так как

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

то данное уравнение эквивалентно следующему:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} = 4 \text{ или}$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2x} - 4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + 1 = 0.$$

Решая его как квадратное, получим

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Отсюда:

а) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3},$

$$(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}, \quad \frac{x}{2} = 1, \quad x_1 = 2;$$

б) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^x = 2-\sqrt{3}, \; (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2+\sqrt{3})^{-1},$

$$\frac{x}{2} = -1, \quad x_2 = -2.$$

408. Разделив обе части уравнения на 8^x, придем к следующему уравнению, равносильному данному:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2.$$

Положим $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Тогда получим: $y^3 + y - 2 = 0$; $y^3 - 1 + y - 1 = 0$; $(y-1)(y^2+y+2) = 0$. Но $y^2 + y - 2 = 0$ не имеет вещественных корней. Поэтому

$$y = 1; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1; \quad x = 0.$$

409. Воспользовавшись формулой

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

и потенцированием, приведем данную систему к следующей равносильной:

$$|x+y| = 10;\ y = 2|x|.\ \text{Но}\ y = 2|x| > 0$$

и, следовательно,

$$x + y = x + 2|x| > 0.$$

Поэтому $|x+y| = x+y$ и последняя система приводится к таким двум:

а) $x + y = 10,\ y = 2x;$ б) $x + y = 10,\ y = -2x.$

Решив их, найдем:

$$x_1 = \frac{10}{3},\quad y_1 = \frac{20}{3};\ x_2 = -10,\ y_2 = 20.$$

410. Пользуясь формулой

$$\log_b a = \log_{b^n} a^n$$

и потенцируя, придем к следующей системе, равносильной данной:

$$x\sqrt{y} = a^m;\ \sqrt{x} : \sqrt[3]{y} = a^n \text{ или } x^2 : y = a^{2m};\ x^3 : y^2 = a^{6n}.$$

Отсюда:

$$x = a^{2(2m-3n)};\quad y = a^{6(m-2n)}.$$

411. Замечая, что

$$\log_{\frac{4}{9}} a = \frac{1}{\log_a \frac{4}{9}},$$

и производя потенцирование в первом уравнении, придем к следующей системе, равносильной данной:

$$4xy = 9a^2;\ x + y = 5a.$$

Решив ее, найдем:

$$x_1 = \frac{1}{2}a,\ y_1 = \frac{9}{2}a;\quad x_2 = \frac{9}{2}a,\quad y_2 = \frac{1}{2}a.$$

412. Пользуясь формулой $\log_b a = \log_{b^n} a^n$, приводим логарифмы, входящие в первое уравнение, к основанию 10, а затем потенцируем. В результате система приведется к следующей:

$$(x^2+y^2)^2 = 4a^2(x^2-y^2),\quad xy = a^2.$$

Замечая, что

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 \text{ и } x^2y^2 = a^4,$$

преобразуем первое уравнение новой системы так:

$$(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=4a^2(x^2-y^2),$$
$$(x^2-y^2)^2-4a^2(x^2-y^2)+4a^4=0,$$
$$[(x^2-y^2)-2a^2]^2=0,\quad x^2-y^2=2a^2.$$

Таким образом, приходим к следующей системе, равносильной данной (при условии $x^2>y^2\geqslant 0$):

$$x^2-y^2=2a^2,\quad xy=a^2.$$

Решаем ее:

$$y=\frac{a^2}{x},\quad x^2-\frac{a^4}{x^2}=2a^2,\quad x^4-2a^2x^2-a^4=0,$$

$$x^2=a^2+\sqrt{2a^4}=a^2(1+\sqrt{2});\qquad x_{1,2}=\pm a\sqrt{1+\sqrt{2}},$$

$$y_{1,2}=\frac{a^2}{\pm a\sqrt{1+\sqrt{2}}}=\pm a\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

413. Так как здесь $x>0$ и $y>0$, то, логарифмируя оба уравнения, придем к следующей системе, равносильной данной:

$$\begin{cases}\lg x+\lg y=\lg 4+1;\\ \lg y\cdot\lg x=\lg 4.\end{cases}$$

Из первого уравнения находим выражение для $\lg y$ и подставляем его во второе уравнение:

$$\lg x(\lg 4+1-\lg x)=\lg 4.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, получим

$$\lg x=\frac{\lg 4+1\pm(\lg 4-1)}{2}.$$

Отсюда:

$$\lg x=\lg 4,\ \lg x=1;\ x_1=4,\ x_2=10;\ y_1=10,\ y_2=4.$$

414. Из второго уравнения находим:

$$x+y=(\sqrt[3]{2})^6;\ x+y=4;\ y=4-x.$$

Подставив найденное значение y в первое уравнение, получим:

$$5^{2x}3^{4-x}=5^2\cdot 3^3,\ 3^4\cdot 25^x\cdot 3^{-x}=25\cdot 3^3,$$
$$\left(\frac{25}{3}\right)^x=\frac{25}{3};\ x=1,\ y=3.$$

415. Из первого уравнения следует, что должно быть или $x^2+7x+12=0$, или $y=1$.

Поэтому задача решения данной системы равносильна задаче решения следующих двух систем:

а) $x^2+7x+12=0,\ x+y=6$; б) $y=1,\ x+y=6$.

Их решения такие:

$$x_1 = -3,\ y_1 = 9;\ x_2 = -4,\ y_2 = 10;\ x_3 = 5,\ y_3 = 1.$$

416. Исключив y, получим

$$8^x = 2 \cdot 2^x \quad \text{или} \quad 2^{3x} = 2^{x+1},$$

откуда $3x = x+1$, $x = \frac{1}{2}$. Подставляя $x = \frac{1}{2}$ во второе уравнение, найдем

$$y = \frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}\sqrt{2}.$$

417. Из первого уравнения находим $y = x^{\frac{x+y}{12}}$. Подставляем найденное значение y во второе уравнение. Получим $x^{\frac{(x+y)^2}{12}} = x^3$. Следовательно, или $x = 1$, или $\frac{(x+y)^2}{12} = 3$. Если $x = 1$, то из первого уравнения найдем, что $y = 1$. Итак, первое решение $x_1 = 1$. $y_1 = 1$. Если $\frac{(x+y)^2}{12} = 3$ или $(x+y)^2 = 36$ и $x + y = 6$ $(x > 0$, $y > 0)$, то из любого уравнения системы получим $x = y^2$. Подставив в уравнение $x + y = 6$, придем к уравнению $y^2 + y = 6$. Отсюда

$$y = \frac{-1+5}{2} = 2,\ x = 2^2 = 4.$$

Итак, второе решение $x_2 = 4$, $y_2 = 2$.

418. Здесь предполагается, что $x > 0$ и $y > 0$. Из второго уравнения находим

$$x = y^{\frac{3}{2}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})}$$

и подставляем в первое. Это дает

$$y^{\frac{3}{2}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})^2} = y^{\frac{8}{3}},$$

что возможно, когда $y = 1$ или

$$\frac{3}{2}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})^2 = \frac{8}{3}, \text{ т. е. } \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, получаем две системы:

$$\text{а) } y = 1,\ y^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = x^{\frac{2}{3}}$$

и

б) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=\frac{4}{3}$, $y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=x^{\frac{2}{3}}$,

решение которых есть задача, равносильная решению данной системы. Чтобы найти решения первой системы, подставляем во второе уравнение $y=1$ и получаем $x=1$. Итак, $x_1=1$, $y_1=1$. Обращаемся теперь ко второй системе. Подставив

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=\frac{4}{3}$$

в показатель левой части второго уравнения, найдем $x=y^2$. Теперь для определения y имеем уравнение

$$\sqrt[4]{y^2}+\sqrt[4]{y}-\frac{4}{3}=0.$$

Решаем его:

$$\sqrt[4]{y}=\frac{-3+\sqrt{9+48}}{6}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{57}$$

(значение $-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{57}<0$ и потому не может быть приравнено $\sqrt[4]{y}$). Следовательно,

$$y_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{57}\right)^4;\quad x_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{57}\right)^8.$$

419. Так как здесь $x>0$ и $y>0$, то, прологарифмировав первое уравнение системы, получим следующее, ему эквивалентное уравнение: $m\log_p x=n\log_p y$. Так как $y\neq 1$ (см. второе уравнение), то последнее можно записать в виде

$$\frac{\log_p x}{\log_p y}=\frac{n}{m}$$

при условии, что $m\neq 0$. Сравнивая полученное уравнение со вторым, видим, что

$$\log_p\frac{x}{y}=\frac{n}{m}\quad\text{или}\quad m\log_p x-m\log_p y=n.$$

Таким образом, при $m\neq 0$ данная система эквивалентна такой:

$$m\log_p x-n\log_p y=0,\quad m\log_p x-m\log_p y=n.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$(n-m)\log_p y=n,$$

и если $n\neq m$, то

$$\log_p y=\frac{n}{n-m},\quad \log_p x=\frac{n}{m}\log_p y=\frac{n^2}{m(n-m)}.$$

Следовательно, в этом случае система имеет единственное решение:

$$x = p^{\frac{n^2}{m(n-m)}}, \quad y = p^{\frac{n}{n-m}}.$$

Если $n = m \neq 0$, то ввиду положительности x и y из первого уравнения следует $x = y$, что невозможно, так как при $x = y$ левая часть второго уравнения будет 0, а правая 1. Таким образом, при $n = m \neq 0$ система не имеет решений. Если $m = 0$, но $n \neq 0$, тогда из первого уравнения получим $y = 1$. Однако $y = 1$ не является допустимым значением для второго уравнения. Следовательно, при $m = 0$ и $n \neq 0$ система не имеет решений. Наконец, при $m = n = 0$ первое уравнение удовлетворяется тождественно и все решения системы найдутся как решения второго уравнения. Из второго уравнения получим

$$\log_p x = (\log_p x - \log_p y)\log_p y, \quad (\log_p y - 1)\log_p x = \log_p^2 y.$$

Итак, в этом случае система удовлетворяется любой парой таких чисел:

$$y \neq p; \quad x = p^{\frac{\log_p^2 y}{\log_p y - 1}}.$$

420. Допустимыми значениями неизвестных будут лишь $x > 0$ и $y > 0$. Из этого и из второго уравнения следует, что должно быть или $a > 1$ и $b > 1$, или $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$. Если $0 < a < 1$ и $b > 1$ или $a > 1$ и $0 < b < 1$, то система не имеет решения.

Пусть теперь $a > 1$ и $b > 1$ (или $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$). Логарифмируя первое и второе уравнения по любому основанию, получим систему уравнений, эквивалентную данной:

$$y\log x = x\log y; \quad x\log a = y\log b.$$

Перемножая уравнения полученной системы и сокращая на $xy > 0$, придем к системе

$$\log a \log x = \log b \log y; \quad x\log a = y\log b,$$

которая также эквивалентна исходной системе. Из первого уравнения последней системы найдем, что

$$\log x = \frac{\log b}{\log a}\log y, \quad \text{а} \quad x = y^{\frac{\log b}{\log a}}.$$

Подставляя найденное значение во второе уравнение той же системы, получим:

$$y^{\frac{\log b}{\log a}} \cdot \log a = y\log b; \quad y^{\frac{\log b - \log a}{\log a}} = \frac{\log b}{\log a}.$$

Отсюда, если $\log b - \log a \neq 0$, то

$$y=\left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log a}{\log b-\log a}};\ x=\left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log b-\log a}}.$$

Если же $\log b-\log a=0$, то $\log b=\log a$, $a=b$ и из второго уравнения получаем $x=y$. В этом случае системе удовлетворяет любая пара положительных чисел x и y, равных между собой.

421. Здесь допустимые значения для неизвестных $x>0$, $y>0$. Из первого уравнения находим $x=y^{\frac{x}{y}}$ и, подставив найденное значение x во второе, получим $y=y^{\frac{mx}{y}}=y^n$. Но последнее равенство возможно только, когда $y=1$ или $\frac{mx}{y}=n$. Таким образом, задача решения данной системы равносильна задаче решения следующих двухсистем:

$$\text{а) } y=1,\ x^m=y^n \text{ и б) } \frac{mx}{y}=n,\quad x^m=y^n.$$

Подставляя $y=1$ во второе уравнение первой системы, найдем $x=1$. Итак, первое решение $x_1=1$, $y_1=1$. Подставляя $y=\frac{mx}{n}$ во второе уравнение второй системы, получим:

$$x^m=\left(\frac{mx}{n}\right)^n,\quad x^m=\left(\frac{m}{n}\right)^n x^n,\quad x^{m-n}=\left(\frac{m}{n}\right)^n.$$

Если $m-n\neq 0$, то найдем второе решение:

$$x_2=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}},\quad y_2=\frac{mx_2}{n}=\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}.$$

Если же $m-n=0$, т. е. $m=n$, то из второго уравнения получим $x=y$. В этом случае система удовлетворяется любой парой равных положительных чисел x и y.

422. Допустимые значения для неизвестных: $y>1$, x — любое вещественное число. Преобразуем второе уравнение:

$$(y^2-1)^{2x-2}=\frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2},\quad (y-1)^{2x-2}(y+1)^{2x-2}=\frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2},$$
$$(y-1)^{2x-2}(y+1)^{2x}=(y-1)^{2x},$$
$$(y-1)^{2x-2}[(y+1)^{2x}-(y-1)^2]=0.$$

Полученное уравнение равносильно второму уравнению данной системы, и задача решения ее эквивалентна задаче решения следующих двух систем:

$$\text{а) } (y-1)^{2x-2}=0,\ (1+y)^x=100 \text{ (при условии } 2x-2>0)$$
$$\text{и б) } (y+1)^{2x}-(y-1)^2=0,\ (1+y)^x=100.$$

Из первого уравнения первой системы находим $y = 1$ и, подставив во второе уравнение, получаем $2^x = 100$, $x = \log_2 100 > 1$. Итак,

$$x_1 = \log_2 100,\ y_1 = 1.$$

Из первого уравнения второй системы находим $y - 1 = (1 + y)^x$ и, пользуясь вторым уравнением, получаем:

$$y - 1 = 100,\ y = 101;\ 102^x = 100,\ x = \log_{102} 100.$$

Итак, $x_2 = \log_{102} 100$, $y_2 = 101$.

423. Допустимые значения неизвестных $x > 0$, $y > 0$, z — любое вещественное число. Кроме того, следует иметь в виду, что так как $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ — арифметические, то $z > 0$ (это видно из третьего уравнения).

Из первого уравнения находим, что

$$x = y^{\frac{8}{5z}}.$$

Подставляем это значение x во второе уравнение системы. Это даст

$$y^{\frac{z}{3}} = y^{\frac{16}{75z}}.$$

Отсюда видим, что или $y = 1$, или $\frac{z}{3} = \frac{16}{75z}$. Если $y = 1$, то из второго уравнения получаем $x = 1$, а из третьего $z = \frac{18}{5}$. Итак, первое решение

$$x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ z_1 = \frac{18}{3}.$$

Если $\frac{z}{3} = \frac{16}{75z}$, $z^2 = \frac{16}{25}$, $z = \frac{4}{5}$, то $x = y^{\frac{8}{5z}} = y^2$.

Поэтому, подставив $x = y^2$ в третье уравнение, получим:

$$y + \sqrt{y} = \frac{4}{9},\ y = \sqrt{y} - \frac{4}{9} = 0,\ \sqrt{y} = \frac{-1 + \frac{5}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда $y = \frac{1}{9}$, $x = y^2 = \frac{1}{81}$.

Итак, второе решение

$$x_2 = \frac{1}{81},\quad y_2 = \frac{1}{9},\quad z_2 = \frac{4}{5}.$$

424. $x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 2;\ x_2 = \frac{1}{256}\left(\sqrt{\frac{19}{3}} - 1\right)^8,$

$$y_2 = \frac{1}{16}\left(\sqrt{\frac{19}{3}} - 1\right)^4, \quad z_2 = \frac{4}{3}.$$

Решение аналогично решению задачи 423.

VI.

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

425. Воспользовавшись формулой

$$C_k^l = \frac{k - l + 1}{l} \cdot C_k^{l-1},$$

запишем данное равенство так:

$$C_{n+2}^m : \frac{n + 2 - m}{m + 1} \cdot C_{n+2}^m : \frac{n - m + 1}{m + 2} \cdot \frac{n - m + 2}{m + 1} \cdot C_{n+2}^m = 0{,}6 : 1 : 1.$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} 1 : \dfrac{n - m + 2}{m + 1} = \dfrac{3}{5}; \\ 1 : \dfrac{n - m + 1}{m + 2} = 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 5(m + 1) = 3(n - m + 2); \\ m + 2 = n - m + 1. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, найдем $n = 5;\ m = 2$.

426. Первое доказательство. Выделим какие-нибудь два элемента из числа данных $(n + 2)$ элементов. Тогда сочетания из $(n + 2)$ элементов по $(m + 1)$ разделятся на четыре группы: а) не содержащие этих двух элементов; б) содержащие оба эти элемента; в) содержащие первый из выделенных элементов и не содержащие второй; г) содержащие второй из выделенных элементов и не содержащие первый. Очевидно, группы а), б), в), г) состоят соответственно из

$$C_n^{m+1},\ C_n^{m-1},\ C_n^m,\ C_n^m$$

сочетаний, отсюда и следует тождество, которое требуется доказать.

Второе доказательство. Имеем

$$C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} +$$

$$+ \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} + 2 \cdot \frac{n!}{m!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m-1)!}\left[\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(n-m)(n-m+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{m(n-m)}\right] = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m-1)!}\left[\frac{1}{m(m+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2n-m+2}{(n-m)(n-m+1)\,m}\right] = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m-1)!} \times$$

$$\times \frac{n^2+3n+2}{m(m+1)(n-m+1)(n-m)} = \frac{n!\,(n+1)(n+2)}{(m+1)!\,(n-m+1)!} =$$

$$= \frac{(n+2)!}{(m+1)!\,(n-m+1)!} = C_{n+2}^{m+1}.$$

427. Очевидно, искомое число случаев равно

$$C_{30-2}^2 = C_{28}^2 = \frac{28 \cdot 27}{1 \cdot 2} = 378.$$

428. Первый преподаватель может выбрать себе два класса числом способов, равным C_6^2. После выбора им двух классов из оставшихся четырех второй может выбрать себе два класса числом способов, равным C_4^2, а, следовательно, всего способов выбора двумя преподавателями себе по два класса из шести равно $C_6^2 \cdot C_4^2$. Но когда первый и второй выберут по два класса, то останется только два класса и поэтому третий не будет иметь возможности выбирать. Поэтому искомое число способов будет равно

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90.$$

429. Вынуть три выигрышных билета из имеющихся в урне пяти билетов можно числом способов, равным C_5^3. Вынуть же два билета невыигрышных можно числом способов, равным $C_{100-5}^2 = C_{95}^2$. Так как каждые три выигрышных билета могут быть соединены с каждыми двумя невыигрышными, то общее число способов, при которых из пяти вынутых билетов три окажутся выигрышными, равно

$$C_5^3 \cdot C_{95}^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{95 \cdot 94}{1 \cdot 2} = 44\,650.$$

430. Число способов, которыми можно распределить четыре человека, знающих местность, на две группы по два человека в

каждой, равно C_4^2. К каждой такой паре можно присоединить остальных шесть человек числом способов, равным $C_{16-4}^6 = C_{12}^6$. Таким образом, общее число способов указанного в задаче разделения на группы равно

$$\frac{1}{2} C_4^2 \cdot C_{12}^6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 2772.$$

431. Одного маляра можно ввести в состав бригады пятью способами, а к нему присоединить плотника четырьмя способами. Поэтому общее число способов, которыми можно выделить одного маляра и одного плотника, равно $5 \cdot 4$. Очевидно, общее число способов, которыми можно выделить трех человек разных специальностей (маляр, плотник, штукатур), равно $5 \cdot 4 \cdot 2$. Так как остальные члены бригады не должны быть рабочими этих специальностей, то их можно выделить числом способов, равным

$$C_{25-11}^2 = C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{1 \cdot 2} = 91.$$

Итак, искомое число способов есть $5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 91 = 3640$.

432. Занумеруем места ряда числами 1, 2, 3, ..., $2n$. Если разместить мужчин на местах с нечетными номерами, то каждому данному размещению мужчин соответствует $n!$ размещений женщин на местах с четными номерами, потому что это есть не что иное, как всевозможные перестановки из n элементов. Но в свою очередь и мужчины могут быть размещены на нечетных номерах $n!$ способами. Итак, общее число способов, требуемых в задаче, когда мужчины занимают места с нечетными номерами, а женщины места с четными номерами, равно $n!\,n! = (n!)^2$. Но мужчин можно посадить и на места с четными номерами, тогда, повторяя предыдущие рассуждения, убедимся, что и таких способов будет $(n!)^2$. Отсюда видно, что полное число распределений будет равно $2(n!)^2$.

433. Очевидно, число способов раздачи не зависит от порядка раздачи. Поэтому пусть сперва получит две карты третье лицо. Одна карта у него должна быть червонный туз, вторую карту он может взять девятью способами, поскольку остается после изъятия червонного туза девять карт. После того как третье лицо возьмет 2 карты, останется 8, причем червонного туза среди них не будет, и второе лицо может взять 4 карты числом способов, равным C_8^4. Таким образом, число способов, которыми могут взять 2 карты, в том числе червонный туз, третье лицо и 4 карты второе лицо, равно $9C_8^4$. Но при каждом выборе этими лицами положенного им числа карт первому предоставляется возможность выбрать 3 карты из четырех, что можно сделать числом способов, равным $C_4^3 = C_4^1 = 4$. Следовательно, общее число способов раздачи равно $4 \cdot 9C_8^4 = 2520$.

434. Различных однозначных чисел, исключая нуль, будет $A_4^1 = 4$. Если бы среди данных цифр не было нуля, то число различных двузначных чисел было бы равно A_5^2. Но так как среди них есть нуль, то в числе размещений из этих пяти цифр по две есть однозначные числа, это те, которые начинаются с нуля. Число их равно $A_4^1 = 4$. Значит, различных двузначных чисел получится $A_5^2 - A_4^1 = 16$. Аналогично найдем, что число различных трех-, четырех- и пятизначных чисел будет равно соответственно

$$A_5^3 - A_4^2 = 48,\ A_5^4 - A_4^3 = 96 \text{ и } A_5^5 - A_4^4 = 96.$$

Всего получится $4 + 16 + 48 + 96 + 96 = 260$ чисел.

435. Число различных двузначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3 так, что в каждое двузначное число входит каждая из этих цифр не более одного раза, равно $A_4^2 - A_3^1 = 9$. Если же учесть, что цифра 3 может входить в число два раза, то к уже полученным двузначным числам добавится число 33, а всего получится 10 чисел.

436. Из пяти элементов можно составить $P_5 = 5!$ различных перестановок. В этой задаче элементами являются цифры 1, 1, 2, 3, 4 и, следовательно, каждая перестановка даст пятизначное число, в которое войдет два раза цифра 1 и по одному каждая из цифр 2, 3, 4. Но среди этих цифр будут одинаковые, а также числа меньше 20 000. Выясним, сколько чисел будет различных. Если в каком-либо полученном числе поменять местами две цифры, то получится другая перестановка. Если эти цифры различны, то получится и другое пятизначное число. Если же эти цифры одинаковы, то число останется прежним. Но в каждое число входят две единицы, меняя которые местами, мы получаем то же число, но другую перестановку. Следовательно, различных пятизначных чисел будет $\frac{1}{2}P_5 = \frac{1}{2} \cdot 5! = 60$. Среди них числа, начинающиеся с единицы, будут меньше 20 000. Подсчитаем количество последних. Отбросим первый элемент. Тогда из остальных четырех, т. е. из цифр 1, 2, 3, 4, можно составить $P_4 = 4! = 24$ четырехзначных числа. Если впереди каждого из них приписать отброшенный ранее элемент, т. е. цифру 1, то получатся различные пятизначные числа, меньшие 20 000. Те же самые числа получились бы, если бы отбросить второй элемент и, составив из оставшихся различные четырехзначные числа, приписать впереди отброшенный ранее элемент, т. е. единицу. Но раз они дадут те же самые числа, то их учитывать не нужно. Все прочие числа, как пятизначные и начинающиеся с цифр 2, 3, 4, будут больше 20 000.

Итак, искомое количество чисел равно 60—24 = 36.

437. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить $P_5 = 5!$ различных пятизначных чисел без повторения цифр. Среди них будут и такие, которые будут иметь рядом стоящие четные цифры 2 и 4. Подсчитаем количество последних. Для этого рассмотрим четыре

следующих элемента: 1, 24, 3, 5. Число перестановок $P_4 = 4!$ даст пятизначные числа, в которых четные цифры стоят рядом, причем спёрва цифра 2, а потом цифра 4. Если рассмотреть элементы 1, 3,42, 5, то число перестановок из них также даст пятизначные числа, в которых рядом стоят четные цифры, причем сперва цифра 4, а потом цифра 2. Иных пятизначных чисел, в которых бы рядом стояли четные цифры, очевидно, нет. Поэтому искомое количество чисел равно $5! - 2 \cdot 4! = 72$.

438. Так как при первом биноме есть множитель x, при втором множитель x^2 и при третьем x^3, то из членов разложения первого бинома нужно взять член с x^3, из членов второго разложения член с x^2 и, наконец, из членов третьего разложения член с x. Умножив эти члены соответственно на x, x^2, x^3, получим

$$-xC_4^3x^3 + x^2C_8^2(2x)^2 + x^3C_{12}^1(3x).$$

Искомый коэффициент будет равен

$$-C_4^3 + 4C_8^2 + 3C_{12}^1 = -4 + 4 \cdot 28 + 3 \cdot 12 = 144.$$

439. $11^{10} - 1 = (10 + 1)^{10} - 1 = 10^{10} + 10 \cdot 10^9 +$

$$+ \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 10^8 + \ldots + 10 \cdot 10 + 1 - 1 = 10^2(10^8 + 10^8 +$$

$$+ 5 \cdot 9 \cdot 10^6 + \ldots + 1) = 100A,$$

где A — натуральное число.

440. Так как $(1 + x)^n = 1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^sx^s + \ldots + x^n$, то коэффициент при x^s в произведении $(1 + x)^n$ на данный трехчлен равен

$$A_s = (s - 2)C_n^{s-2} + nC_n^{s-1} - sC_n^s.$$

Но $C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n - k + 1}{k}$. Поэтому

$$A_s = (s - 2)C_n^{s-2} + nC_n^{s-1} - sC_n^{s-1} \cdot \frac{n - s + 1}{s} = (s - 2)C_n^{s-2} +$$

$$+ C_n^{s-1}(n - n + s - 1) = (s - 1)C_n^{s-2} + (s - 1)C_n^{s-1} =$$

$$= (s - 2)C_n^{s-2} + (s - 1)C_n^{s-2} \cdot \frac{n - s + 2}{s - 1} =$$

$$= C_n^{s-2}(s - 2 + n - s + 2) = nC_n^{s-2}.$$

441. C_{2n}^n является биномиальным коэффициентом при x^n в разложении $1 + x)^{2n}$. С другой стороны,

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n(x + 1)^n$$

и тот же коэффициент можно получить, собрав коэффициенты при x^n в произведении

$$(1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n)(x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + \ldots + 1).$$

Он получится, если умножить первые члены этих разложений, затем вторые и т. д., наконец, последние и результаты сложить. Это и приведет нас к равенству

$$1^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

442. Коэффициент третьего члена равен C_n^2, а коэффициент второго C_n^1. По условию первый из них больше второго на 44. Поэтому получаем уравнение

$$C_n^2 - C_n^1 = 44.$$

Решим его:

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - n = 44, \quad n^2 - 3n - 88 = 0; \quad n = \frac{3 \pm 19}{2}.$$

Знак минус должен быть отброшен, потому что $n > 0$. Получаем $n = 11$. Находим свободный член

$$T_{k+1} = C_{11}^k \left(x \sqrt{x}\right)^{11-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^4}\right)^k = (-1)^k C_{11}^k x^{\frac{33-11k}{2}}.$$

Чтобы x был в нулевой степени, нужно, чтобы $\frac{33-11k}{2} = 0$, т. е. $k = 3$. Отсюда свободный член равен $-C_{11}^3 = -165$.

443. Сумма коэффициентов первого разложения есть 2^n, а второго 2^{2n}. По условию первая меньше второй на 240. Поэтому получаем уравнение $2^{2n} - 2^n = 240$. Решим его:

$$2^{2n} - 2^n - 240 = 0, \quad 2^n = \frac{1 \pm 31}{2}.$$

Знак минус нужно отбросить, так как $2^n > 0$. Получаем $2^n = 16 = 2^4$, $n = 4$. Находим третий член разложения

$$T_3 = C_4^2 (\sqrt{x})^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 = 6 \sqrt[3]{x}.$$

444. Имеем

$$T_{n+1} = C_{100}^n (\sqrt{2})^{100-n} (\sqrt[3]{3})^n = C_{100}^n \cdot 2^{\frac{100-n}{2}} \cdot 3^{\frac{n}{3}}.$$

Так как для рациональности члена показатели $\frac{100-n}{2}$ и $\frac{n}{3}$ должны быть целыми числами, то число n должно быть кратно 3 и 2, т. е. кратно 6. Но $0 \leqslant n \leqslant 100$ и числа n, кратные шести, будут 0, 6, 12, ..., 96. Подсчитаем число m их. Получим:

$$96 = 0 + 6(m-1); \quad m - 1 = 16; \quad m = 17.$$

445. Напишем общий член данного бинома

$$T_{n+1} = C_{20}^n (\sqrt[3]{2})^{20-n} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = (-1)^n C_{20}^n \cdot 2^{\frac{40-5n}{6}}.$$

Рациональными членами будут те, для которых $\frac{40-5n}{6}$ равно целому числу. Выясним, при каких n это будет иметь место:

$$\frac{40-5n}{6} = m;\ 40-5n = 6m;\ 5n = 40-6m;\ n = 8-m-\frac{1}{5}m.$$

Чтобы для n получились целые значения, нужно придавать m значения, кратные пяти, но при этом такие, чтобы число n не выходило из интервала, заключенного между числами 0 и 20. Такие значения для m будут: -10, -5, 0, 5, а соответствующие числа для n: 20, 14, 8, 2. Искомые члены будут:

$$T_{21} = 2^{-10};\ T_{15} = C_{20}^{14} \cdot 2^{-5} = C_{20}^6 \cdot 2^{-5};$$

$$T_9 = C_{20}^8;\ T_3 = C_{20}^2 \cdot 2^5.$$

446. По условию

$$C_n^k - C_n^{k-1} = C_n^{k+1} - C_n^k.$$

Воспользовавшись формулой $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n}$ и сделав некоторые преобразования, приведем это уравнение к такому виду:

$$n^2 - (4k+1)n + 4k^2 - 2 = 0,$$

откуда

$$n = \frac{4k+1 \pm \sqrt{8k+9}}{2}.$$

Так как $4k+1$ — число нечетное, а n — натуральное, то необходимо, чтобы $\sqrt{8k+9}$ был нечетным числом, т. е. чтобы $8k+9 = (2m+1)^2$. Отсюда находим, что

$$k = \frac{(m-1)(m+2)}{2};\quad n = \frac{2(m-1)(m+2)+1 \pm (2m+1)}{2};$$

$$n_1 = m^2 - 2,\quad n_2 = (m+1)^2 - 2.$$

Выражения для n_1 и n_2 можно объединить в одной формуле $n = m^2 - 2$. Так как $0 \leqslant k-1 < k < k+1 \leqslant n$ и $k = \frac{(m-1)(m+2)}{2}$, то отсюда заключаем, что m может принимать лишь значения 3, 4, 5, ... Действительно, при $m = 1$ будет $k = 0$, что невозможно, так как тогда будет $k - 1 < 0$, что невозможно, а при $m = 2$ получим $k = n = 2$, что противоречит неравенству $k + 1 \leqslant n$.

447. Так как $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} \cdot 2^k$, то должно быть

$$C_n^9 \cdot 2^9 > C_n^8 \cdot 2^8 \text{ и } C_n^9 \cdot 2^9 > C_n^{10} \cdot 2^{10}. \text{ Но } C_n^k = C_n^{k-1} \times$$

$$\times \frac{n-k+1}{k}. \text{ Поэтому предыдущие неравенства примут вид } \frac{n-8}{9} \cdot 2 > 1 \text{ и } 1 > \frac{n-9}{10} \cdot 2.$$

Из первого неравенства находим: $2n - 16 > 9$, $2n > 25$, $n > 12{,}5$. Из второго неравенства находим $n - 9 < 5$, $n < 14$. Итак, $12{,}5 < n < 14$. Следовательно, $n = 13$.

448. Наибольший коэффициент разложения $(a+b)^{2n}$ есть коэффициент C_{2n}^n у $(n+1)$-го члена. Покажем, что он — четное число:

$$C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n} =$$

$$= \frac{2n}{n} \cdot \frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-1-n+2)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} = 2C_{2n-1}^{n-1}.$$

449. В разложении $(1+\sqrt{2})^{50}$ общий член

$$T_{n+1} = C_{50}^n (\sqrt{2})^n.$$

Биномиальный коэффициент C_{50}^n растет с возрастанием n от 0 до 26, а затем убывает. Множитель $(\sqrt{2})^n$ все время растет с возрастанием n. Следовательно, пока n растет от 0 до 26, растет и величина члена разложения. Когда n станет больше 26, то биномиальный коэффициент C_{50}^n станет убывать с возрастанием n, и хотя $(\sqrt{2})^n$ при этом возрастает, все же не ясно, будет ли общий член T_{n+1} возрастать или убывать. Чтобы это выяснить, исследуем отношение $(n+1)$-го члена разложения к n-му, т. е. отношение $T_{n+1} : T_n$. Вначале это отношение, как мы выяснили, больше единицы. Когда это отношение будет и будет ли меньше единицы?

Имеем

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{C_{50}^n \cdot (\sqrt{2})^n}{C_{50}^{n-1} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}} = \frac{51-n}{n} \cdot \sqrt{2}.$$

Решим неравенство $\frac{51-n}{n} \cdot \sqrt{2} < 1$.

$$\frac{51}{n} - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{51}{n} < \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$n > \frac{51\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 51(2-\sqrt{2}).$$

Итак, при $n > 51(2-\sqrt{2})$ отношение $T_{n+1} : T_n$ будет меньше единицы. Найдем наименьшее целое число, большее числа

$51(2-\sqrt{2})$. Возьмем значение $\sqrt{2}$ по недостатку и по избытку с точностью до одной тысячной:

1) $\sqrt{2}=1{,}414$; $2-\sqrt{2}=0{,}586$; $51(2-\sqrt{2})=29{,}886$;

2) $\sqrt{2}=1{,}415$; $2-\sqrt{2}=0{,}585$; $51(2-\sqrt{2})=29{,}835$.

Сопоставляя числа 29,835 и 29,886, видим, что в числе $51(2-\sqrt{2})$ содержится 29 целых и еще правильная дробь. Значит, наименьшее целое число, которое больше числа $51(2-\sqrt{2})$, есть 30. Следовательно, начиная с $n=30$, отношение $T_{n+1}:T_n$ становится меньше единицы и, значит, $T_{31}<T_{30}$. При значениях $n<30$ отношение $T_{n+1}:T_n>1$. Это означает, что $T_{30}>T_{29}>\ldots>T_1$, т. е. наибольший член разложения есть

$$T_{30}=C_{50}^{29}(\sqrt{2})^{29}=C_{50}^{21}(\sqrt{2})^{29}.$$

450. Покажем, что в разложении $(p+q)^n$ при $p>0$, $q>0$ и $p+q=1$ существует наибольший член, и найдем его номер. Для наибольшего члена должны, очевидно, выполняться неравенства: $T_k\geqslant T_{k-1}$, $T_k\geqslant T_{k+1}$. Если воспользоваться формулой

$$T_k=C_n^{k-1}\cdot p^{n-k+1}q^{k-1},$$

то неравенства примут вид

$$\frac{(n-k+2)q}{(k-1)p}\geqslant 1,\qquad \frac{kp}{(n-k+1)q}\geqslant 1.$$

Из первого найдем, что $k\leqslant(n+1)q+1$, а из второго $k\geqslant(n+1)q$. Объединяя, получим

$$(n+1)q\leqslant k\leqslant(n+1)q+1.$$

Если $(n+1)q$ будет целым числом, то и $(n+1)q+1$ тоже будет целым, и так как оба они удовлетворяют написанным выше соотношениям для k, то эти два числа дадут номера наибольших членов разложения. Таким образом, в этом случае будет два наибольших члена. Очевидно, что для того, чтобы один из этих членов был первым или последним ($k=1$ или $k=n+1$), должно быть соответственно $(n+1)q=1$ или $n+1=q(n+1)+1$.

Если $(n+1)q$ будет нецелым числом, то, так как k не может равняться дробному числу $(n+1)q$, оно больше его, а так как оно не может равняться дробному числу $(n+1)q+1$, то оно меньше его. Такое целое число единственное. Это есть целая часть числа $(n+1)q+1$. Таким образом, в этом случае будет один наибольший член. Чтобы этот член был первым или последним, очевидно, должно быть соответственно $(n+1)q<1$ или $n+1<q(n+1)+1$.

451. Представим выражение $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^6$ в следующем ви-

де: $\left[1+\left(x+\frac{2}{x}\right)\right]^6$. Рассматривая 1 как первый член бинома, а $x+\frac{2}{x}$ как второй, по формуле общего члена можем написать:

$$T_{k+1}=C_6^k\left(x+\frac{2}{x}\right)^k.$$

Здесь k принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Применяя формулу общего члена к биному $\left(x+\frac{2}{x}\right)^k$, получим для него такое выражение:

$$T'_{m+1}=C_k^m\cdot x^{k-m}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^m=C_k^m\cdot 2^m\cdot x^{k-2m}.$$

Таким образом, общий член разложения $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^6$ будет иметь вид $C_6^k\cdot C_k^m\cdot 2^m\cdot x^{k-2m}$. Здесь m принимает значения 0, 1, ..., k. Из выражения общего члена ясно, что свободный член получится при $k-2m=0$, т. е. когда $m=\frac{k}{2}$. Следовательно, для получения свободного члена нужно взять всевозможные четные значения для k, а такими значениями будут числа 0, 2, 4, 6, положив для соответствующих m значения в два раза меньше, т. е. 0, 1, 2, 3. Таким образом, свободный член разложения $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^6$ будет равен

$$1+C_6^2\cdot C_2^1\cdot 2+C_6^4\cdot C_4^2\cdot 2^2+C_6^6\cdot C_6^3\cdot 2^3=$$
$$=1+60+360+160=581.$$

452. Положим $(1+x-x^2)^{25}=A_1x^{50}+A_2x^{49}+\ldots+A_{51}$. При $x=1$ получим

$$A_1+A_2+\ldots+A_{51}=1.$$

Значит, нужно найти член A_3x^3. Так как $(1+x-x^2)^{25}=[1+x(1-x)]^{25}$, то, рассматривая последнее выражение как бином, можем написать его общий член в виде

$$T_{k+1}=C_{25}^k\cdot x^k(1-x)^k.$$

С другой стороны, для $(1-x)^k$ общий член будет такой:

$$T'_{l+1}=C_k^l\cdot(-x)^l.$$

Поэтому получим

$$T_{k+1}=C_{25}^k\cdot C_k^l\cdot(-1)^l\cdot x^{k+l}.$$

Здесь должно быть $0 \leqslant k \leqslant 25$, $0 \leqslant l \leqslant k$, $k + l = 3$, $l = 3 - k$. Отсюда видно, что может быть только $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ и соответственно $l_1 = 0$, $l_2 = 1$. Заметим, что под C_k^0 подразумевается единица.

Итак,

$$A_3 x^2 = (C_{25}^3 \cdot C_3^0 - C_{25}^2 \cdot C_2^1)\, x^2 = 1700\ x^2.$$

453. Данное выражение является геометрической прогрессией с первым членом, равным $(1 + x)^3$, и знаменателем, равным $1 + x$. Поэтому имеем

$$(1 + x)^3 + (1 + x)^4 + \ldots + (1 + x)^{15} =$$

$$= \frac{(1 + x)^3 [(1 + x)^{13} - 1]}{1 + x - 1} = \frac{1}{x} [(1 + x)^{16} - (1 + x)^3].$$

Так как в знаменателе находится x, то для получения члена с x^3 нужно в числителе найти член с x^4. Такой член есть только в разложении $(1 + x)^{16}$ и коэффициент при нем

$$C_{16}^4 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820$$

является искомым.

454. Левая часть данного выражения есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{x}{1 + x}$. Воспользовавшись формулой суммы членов геометрической прогрессии, а затем формулой бинома Ньютона, получим

$$\frac{(1 + x)^n \left[\left(\frac{x}{1 + x} \right)^{n+1} - 1 \right]}{\frac{x}{1 + x} - 1} = (x + 1)^{n+1} - x^{n+1} = (n + 1)\, x^n +$$

$$+ \frac{(n + 1)\, n}{1 \cdot 2}\, x^{n-1} + \frac{(n + 1)\, n\, (n - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, x^{n-2} + \ldots + 1.$$

455. Заменяя x через $(x - 2) + 2$, получим

$$x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 72x + 45 = [(x - 2) + 2]^4 - 11 [(x - 2) + 2]^3 + 43 [(x - 2) + 2]^2 - 72 [(x - 2) + 2] + 45.$$

Если теперь раскрыть по формуле бинома Ньютона выражения $[(x - 2) + 2]^k$, где $k = 2, 3, 4$, рассматривая $x - 2$ как один член, то после приведения подобных членов получим

$$(x - 2)^4 - 3 (x - 2)^3 + (x - 2)^2 + 1.$$

Задачу можно решить, пользуясь условием равенства многочленов и записав предварительно данный многочлен так:

$$A (x - 2)^4 + B (x - 2)^3 + C (x - 2)^2 + D (x - 2) + E.$$

VII.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Указание.

При решении задач этого раздела следует иметь в виду, что, говоря о тождественности двух математических выражений, мы исключаем из рассмотрения те значения входящих в них букв, при которых хотя бы одно из них теряет смысл.

456. $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = \sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} =$

$$= \frac{\sin 4\alpha \sin 2\alpha + \cos 4\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos(4\alpha - 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} =$$

$$= \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

457. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}} =$

$$= \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 60^\circ \operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha).$$

458. $\operatorname{tg}(35^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) = \dfrac{\sin(35^\circ + \alpha) \sin(25^\circ - \alpha)}{\cos(35^\circ + \alpha) \cos(25^\circ - \alpha)} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}[\cos(10^\circ + 2\alpha) - \cos 60^\circ]}{\frac{1}{2}[\cos(10^\circ + 2\alpha) + \cos 60^\circ]} = \frac{\cos(10^\circ + 2\alpha) - \frac{1}{2}}{\cos(10^\circ + 2\alpha) + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2\cos(10^\circ + 2\alpha) - 1}{2\cos(10^\circ + 2\alpha) + 1}.$$

459. $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$

$$= \frac{\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha.$$

460. $\sin x \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right) = \sin x \cdot \dfrac{\cos x \cos \dfrac{x}{2} + \sin x \sin \dfrac{x}{2}}{\cos x \cos \dfrac{x}{2}} =$

$$= \sin x \cdot \frac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x \cos\frac{x}{2}} = \sin x \cdot \frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x \cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

461. $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha -$

$$- \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha}(1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha (1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha) =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha.$$

462. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg} 2\alpha - 4\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha} -$

$$- 2\operatorname{tg} 2\alpha - 4\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - 4\operatorname{tg} 4\alpha =$$

$$= \frac{2(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} - 4\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} - \frac{4\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{4(\cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha)}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha} = \frac{8\cos 8\alpha}{\sin 8\alpha} = 8\operatorname{ctg} 8\alpha.$$

463. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta +$

$$+ \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right](\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)(\operatorname{tg}\alpha +$$

$$+ \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1.$$

464. $\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma = 2\sin n(\alpha + \beta)\cos n(\alpha - \beta) +$

$$+ 2\sin n\gamma \cos n\gamma = 2\sin n(\pi - \gamma)\cos n(\alpha - \beta) +$$

$$+ 2\sin n\gamma \cos n[\pi - (\alpha + \beta)] = 2\sin(n\pi - n\gamma)\cos n(\alpha - \beta) +$$

$$+ 2\sin n\gamma \cos[n\pi - n(\alpha + \beta)] = 2 \cdot (-1)^n \sin(-n\gamma)\cos n(\alpha - \beta) +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^n \sin n\gamma \cos n(\alpha + \beta) = 2 \cdot (-1)^n \sin n\gamma [\cos n(\alpha + \beta) -$$

$$- \cos n(\alpha - \beta)] = 2 \cdot (-1)^n \sin n\gamma (-2\sin n\alpha \sin n\beta) =$$

$$= (-1)^{n+1} 4\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma.$$

465. $\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n\beta + \operatorname{tg} n\gamma = \operatorname{tg} n\alpha +$

$$+ \frac{\operatorname{tg} n\beta + \operatorname{tg} n\gamma}{1 - \operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma}(1 - \operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma) = \operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n(\gamma +$$

$$+\beta)(1-\operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma)=\operatorname{tg} n\alpha+\operatorname{tg} n(\pi-\alpha)(1-\operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma)=$$
$$=\operatorname{tg} n\alpha-\operatorname{tg} n\alpha(1-\operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma)=\operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma.$$

466. $$\frac{\sin y+\sin x\cos(x+y)}{\cos y-\sin x\sin(x+y)}=\frac{\sin y+\frac{1}{2}[\sin(2x+y)-\sin y]}{\cos y-\frac{1}{2}[\cos y-\cos(2x+y)]}=$$

$$=\frac{\sin y+\sin(2x+y)}{\cos y+\cos(2x+y)}=\frac{2\sin(x+y)\cos x}{2\cos(x+y)\cos x}=\operatorname{tg}(x+y).$$

467. $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+$$

$$+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=1+\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)-$$
$$-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=1-\cos^2(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta).$$

468. $$\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta=\frac{1+\cos 2(\alpha+\beta)}{2}+$$

$$+\frac{1+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}-\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)]=1+$$

$$+\frac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}-\frac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}=1.$$

469. $$4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 120^\circ)=$$

$$=2\sin\alpha\cos 2\alpha-2\sin\alpha\cos 120^\circ=\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha=\sin 3\alpha.$$

470. $$16\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ\sin 90^\circ=8\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=$$

$$=\frac{4\cdot 2\sin 10^\circ\cos 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{4\sin 20^\circ\cos 20^\circ\sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}=1.$$

471. Обозначим левую часть подлежащего доказательству тождества буквой A. Будем иметь

$$A=\frac{1}{32}\sin 20^\circ\sin 40^\circ\cdot\sqrt{3}\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{64}(\cos 20^\circ-$$

$$-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{64}\left(\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)=$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{128}(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ - \sin 80^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{128}\left(\sin 80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 80^\circ\right) = \frac{3}{256}.$$

472. $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} =$

$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4}.$$

473. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$

$$= -\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= -\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

474. $\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 175^\circ = -\frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 10^\circ)\cos 5^\circ =$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 5^\circ + \cos 10^\circ \cos 5^\circ\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}(-\cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 5^\circ) =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 15^\circ = -\frac{1}{4}\cos(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}.$$

475. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 2 \cdot \dfrac{\cos 10^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} =$

$$= 2 \cdot \frac{\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ \cos 60^\circ} = 2 \cdot \frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ \cos 60^\circ} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 60^\circ} = 4.$$

476. $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = 2\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10} =$

$$= \frac{2\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} \cdot 2\sin \frac{3\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10}}{2\cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{2\pi}{10} \sin \frac{6\pi}{10}}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5}}{2\sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2}.$$

477. $\frac{2\sin \frac{\pi}{7}\left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin \frac{\pi}{7}} =$

$$= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{7}}\left(2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \right.$$

$$\left. + 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}\right) = \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{7}}\left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7}\right) = \frac{\sin \pi - \sin \frac{\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$= -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

478. $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = 2\sin 54^\circ \cos 7^\circ -$
$- 2\sin 18^\circ \cos 7^\circ = 2\cos 7^\circ (\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = 4\cos 7^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ =$
$= \cos 7^\circ \cdot \frac{4\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ \cdot \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} =$
$= \cos 7^\circ \cdot \frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \cos 7^\circ.$

479. $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = 2\cos 36^\circ \cos 12^\circ -$

$- 2\cos 48^\circ \cos 36^\circ = 2\cos 36^\circ (\cos 12^\circ - \cos 48^\circ) =$

$= 4\cos 36^\circ \sin 18^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{2\cos 18^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} =$

$= \dfrac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \dfrac{\sin 72^\circ}{2\sin 72^\circ} = \dfrac{1}{2}.$

480. $\dfrac{1}{2\sin 5^\circ}(2\sin 5^\circ \sin 10^\circ + 2\sin 5^\circ \sin 20^\circ + \ldots +$

$+ 2\sin 5^\circ \sin 50^\circ) = \dfrac{1}{2\sin 5^\circ}(\cos 5^\circ - \cos 15^\circ + \cos 15^\circ - \cos 25^\circ +$

$+ \cos 25^\circ - \cos 35^\circ + \cos 35^\circ - \cos 45^\circ + \cos 45^\circ - \cos 55^\circ) =$

$= \dfrac{\cos 5^\circ - \cos 55^\circ}{2\sin 5^\circ} = \dfrac{2\sin 30^\circ \sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ} = \sin 25^\circ \sin 30^\circ \operatorname{cosec} 5^\circ.$

481. $\operatorname{tg} 2\alpha [\operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)] + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) =$

$= \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \dfrac{\operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)} [1 - \operatorname{tg}(30^\circ -$

$- \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)] + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) =$

$= \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(90^\circ - 2\alpha) [1 - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)] +$

$+ \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha [1 - \operatorname{tg}(30^\circ -$

$- \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)] + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) =$

$= 1 - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = 1.$

482. $1 + 2\cos 7x = 1 + \dfrac{2\cos 7x \sin 7x}{\sin 7x} = 1 + \dfrac{\sin 14x}{\sin 7x} =$

$= \dfrac{\sin 7x + \sin 14x}{\sin 7x} = \dfrac{2\sin 10{,}5x \cos 3{,}5x}{2\sin 3{,}5x \cos 3{,}5x} = \dfrac{\sin 10{,}5x}{\sin 3{,}5x}.$

483. $4\cos\left(30^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) \sin\left(60^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 2[\sin(90^\circ - \alpha) +$

$+ \sin 30^\circ] = 2\left(\cos\alpha + \dfrac{1}{2}\right) = 1 + 2\cos\alpha = 1 +$

$+ \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 + \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{\sin\alpha} =$

$= \dfrac{2\sin\dfrac{3}{2}\alpha \cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{3}{2}\alpha}{\sin\dfrac{1}{2}\alpha}.$

484. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} +$

$$+ 1 - \cos^2\gamma = 2 - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2[\pi - (\alpha+\beta)] =$$

$$= 2 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) =$$

$$= 2 - \cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] =$$

$$= 2 - \cos(\pi-\gamma)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

485. $(\operatorname{tg}30^\circ + \operatorname{tg}60^\circ) + (\operatorname{tg}40^\circ + \operatorname{tg}50^\circ) = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 30^\circ \cos 60^\circ} +$

$$+ \frac{\sin 90^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{1}{\cos 30^\circ \sin 30^\circ} + \frac{1}{\cos 40^\circ \sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{2}{\sin 60^\circ} + \frac{2}{\sin 80^\circ} = \frac{2(\sin 80^\circ + \sin 60^\circ)}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin 70^\circ \cos 10^\circ}{\cos 30^\circ \cos 10^\circ} = \frac{4\cos 20^\circ}{\cos 30^\circ}.$$

486. $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta = 1 - \cos^2(\alpha+\beta) -$

$$- \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2} = -\cos^2(\alpha+\beta) +$$

$$+ \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} = -\cos^2(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) =$$

$$= \cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] = 2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta.$$

487. $1 + \cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 2 = 2\cos^2 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 2 =$

$$= 2(\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1) = 2(1 - \cos 2\alpha)^2 = 8\sin^4\alpha.$$

488. $(\cos 11\alpha + \cos 5\alpha) + 3(\cos 9\alpha + \cos 7\alpha) =$

$$= 2\cos 8\alpha\cos 3\alpha + 6\cos 8\alpha\cos\alpha = 2\cos 8\alpha(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha) =$$

$$= 2\cos 8\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos\alpha) = 8\cos 8\alpha\cos^3\alpha.$$

489. $\sin 5\alpha\sin 4\alpha + \sin 4\alpha\sin 3\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = \sin 5\alpha\sin 4\alpha +$

$$+ \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 7\alpha) - \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 3\alpha) = \sin 5\alpha\sin 4\alpha +$$

$$+ \frac{\cos 3\alpha - \cos 7\alpha}{2} = \sin 5\alpha\sin 4\alpha + \sin 5\alpha\sin 2\alpha =$$

$$= \sin 5\alpha(\sin 4\alpha + \sin 2\alpha) = 2\sin 5\alpha\sin 3\alpha\cos\alpha.$$

490. $2\cdot\frac{1}{2}(\cos 30^\circ + \cos 10^\circ) - 2\cos 30^\circ + \sin 40^\circ =$

$$= \cos 10^\circ - \cos 30^\circ + \sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \sin 10^\circ +$$
$$+ 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ = 2\sin 20^\circ (\sin 10^\circ + \sin 70^\circ) =$$
$$= 4\sin 20^\circ \sin 40^\circ \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \sin 20^\circ \sin 40^\circ.$$

491. $[\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma] + \cos\alpha + \cos\beta +$
$$+ \cos\gamma = [\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos\alpha] + (\cos\beta + \cos\gamma) =$$
$$= 2\cos\left(\alpha + \frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\beta+\gamma}{2} + 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} =$$
$$= 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left[\cos\left(\alpha + \frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right] =$$
$$= 4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

492. $\sin 70^\circ + 4(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)\cos 80^\circ = \sin 70^\circ +$
$$+ 2\cos 80^\circ + 4\cos 20^\circ \cos 80^\circ = \sin 70^\circ + 2\cos 80^\circ +$$
$$+ 2\cos 60^\circ + 2\cos 100^\circ = \cos 20^\circ + 2\cos 80^\circ + 1 -$$
$$- 2\cos 80^\circ = 1 + \cos 20^\circ = 2\cos^2 10^\circ.$$

493. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha} =$
$$= \sqrt{\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha} = |\operatorname{tg}\alpha \sin\alpha|.$$

Но $|\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha| = \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \geqslant 0$ или $\cos\alpha > 0$.

Отсюда получаем

$$\frac{(4k-1)\pi}{2} < \alpha < \frac{(4k+1)\pi}{2}, \quad \alpha = (2k+1)\pi.$$

494. $\sqrt{1+\sin 2\alpha} = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} =$
$$= \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = |\sin\alpha + \cos\alpha|. \quad \text{Но } |\sin\alpha + \cos\alpha| =$$
$$= \sin\alpha + \cos\alpha, \quad \text{если} \quad \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\frac{(4k-1)\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} - \alpha \leqslant \frac{(4k+1)\pi}{2} \text{ или } \frac{(8k-1)\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{(8k+3)\pi}{4}.$$

495. $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} =$
$$= \left|\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right| = |\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha|. \quad \text{Но} \quad \operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha| =$$

$= \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha$, если $\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} < 0$.

Отсюда $\sin\alpha < 0$ и $(2k-1)\pi < \alpha < 2k\pi$.

496. $\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} =$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} = \sqrt{(\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2} = |\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha|$.

Но $|\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha| = \operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha =$

$= \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0$. Отсюда $\sin\alpha > 0$ и $2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi$.

Однако в отличие от задачи 495 здесь доказываемое равенство теряет смысл не только при $\alpha = k\pi$, но и при $\alpha = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$.

Поэтому окончательно получим:

$$2k\pi < \alpha < \frac{(4k+1)\pi}{2};\ \frac{(4k+1)\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\pi.$$

497. $\sqrt{\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + 1} =$

$= \sqrt{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2} = |\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha|$. Но $|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| =$

$= -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} < 0$. Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha < 0 \text{ и } \frac{(2k+1)\pi}{2} < \alpha < (k+1)\pi.$$

498. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2} = \sqrt{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2} =$

$= \sqrt{\left(\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}} = \sqrt{\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha} =$

$= |\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha|$. Но $|\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha| = \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$,

если $\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin 2\alpha} > 0$.

Отсюда $\sin 2\alpha > 0$ и $k\pi < \alpha < \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$.

499. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}} +$

$+ \sqrt{\dfrac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} + \sqrt{\dfrac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} =$

$$= \frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} + \frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{2}{|\cos\alpha|} = 2|\sec\alpha|.$$

Но $|\sec\alpha| = -\sec\alpha$, если $\sec\alpha < 0$. Отсюда

$$\frac{(4k+1)\pi}{2} < \alpha < \frac{(4k+3)\pi}{2}.$$

500. $\sqrt{1-\cos\alpha} + \sqrt{1+\cos\alpha} = \sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} +$

$$+ \sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\left(\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\right).$$

Так как

$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

то доказываемое равенство будет справедливо в том и только в том случае, когда

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sin\frac{\alpha}{2} \text{ и } \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = -\cos\frac{\alpha}{2},$$

т. е. когда $\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$ и $\cos\frac{\alpha}{2} \leqslant 0$. Из первого неравенства следует, что угол $\frac{\alpha}{2}$ должен оканчиваться в первом или втором квадранте, а второе неравенство требует, чтобы он оканчивался во втором или третьем квадранте. Следовательно, угол $\frac{\alpha}{2}$ должен оканчиваться во втором квадранте. Итак,

$$\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant (2k+1)\pi, \quad (4k+1)\pi \leqslant \alpha \leqslant (4k+2)\pi.$$

501. Представив левую часть доказываемого равенства в виде

$$\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} + \sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)},$$

замечаем, что она имеет такой же вид, как и левая часть равенства задачи 500. Поэтому и решение ее может быть выполнено по тому же плану. Более того, если положить $\frac{\pi}{2} - \alpha = \varphi$, то $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ и данное равенство примет вид

$$\sqrt{1+\cos\varphi} + \sqrt{1-\cos\varphi} = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Последнее ничем, кроме обозначения аргумента, не отличается от равенства задачи 500. Поэтому можно воспользоваться ответом задачи 500 и написать

$$(4k+1)\pi \leqslant \varphi \leqslant (4k+2)\pi$$

или

$$(4k+1)\pi \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant (4k+2)\pi.$$

Отсюда простыми преобразованиями получим окончательно

$$\left(4k - \frac{3}{2}\right)\pi \leqslant \alpha \leqslant \left(4k - \frac{1}{2}\right)\pi.$$

502. Так как $\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos^2\alpha}} =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{|\sin\alpha|},$$

то для левой части равенства получим

$$\frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sqrt{2}}{|\sin\alpha|} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sin\alpha\,|\sin\alpha|}\right).$$

Для того чтобы в скобках получить $\operatorname{ctg}^2\alpha + 2$, нужно положить $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$, т. е. считать $\sin\alpha < 0$. Действительно, в этом случае выражение в скобках будет равно

$$1 + \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{cosec}^2\alpha = 2 + \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Но если $\sin\alpha < 0$, то $(2k+1)\pi < \alpha < (2k+2)\pi$.

503. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{+\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{1-\frac{1}{10}}} = \frac{1}{3}$;

$$\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{2}{3\left(1-\frac{1}{9}\right)} = \frac{3}{4};\quad \operatorname{tg}(\alpha+2\beta) =$$

$$= \frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{25}{25} = 1.$$

Отсюда $\alpha + 2\beta = 45^\circ + 360^\circ \cdot k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а так как $0 < \alpha < 45^\circ$, $0 < \beta < 45^\circ$ и, следовательно, $0 < \alpha + 2\beta < 135^\circ$, то $k = 0$ и получим $\alpha + 2\beta = 45^\circ$.

504. а) При $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$. б) При всех x, исключая $x = \frac{2k+1}{2}\pi$. в) При всех x, исключая $x = 2k\pi$. г) При всех x.

505. При тех значениях, при которых $\cos\frac{x}{2} \geqslant 0$, т. е. при $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ или $(4k-1)\pi \leqslant x \leqslant (4k+1)\pi$.

506. $\operatorname{tg}\alpha > \sin\alpha$. Действительно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$$= \sin\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} > \sin\alpha.$$

507. Известно, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел, т. е. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причем знак равенства имеет место лишь при $a = b$. Поэтому $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geqslant 1$ и при $a \neq b$ значение $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} > 1$ могут принять тангенс, котангенс, секанс и косеканс, а при $a = b$ — все.

508. Синус единицы больше синуса одного градуса, так как синус единицы по определению равен синусу угла в один радиан, а синус одного радиана больше синуса одного градуса.

509. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$

$$= \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \geqslant 4,$$

так как $\sin^2 2\alpha \leqslant 1$. Это наименьшее значение достигается при $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{4}$.

510. Так как α и β — острые углы, то $0 < \cos\alpha < 1$, $0 < \cos\beta < 1$. Поэтому получаем $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta < \sin\alpha \cdot 1 + 1 \cdot \sin\beta$. Итак, $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.

511. $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$. Действительно, так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то

$$0 < \operatorname{tg}\alpha < 1, \quad 0 < \operatorname{tg}^2\alpha < 1, \quad 0 < 1 - \operatorname{tg}^2\alpha < 1, \quad \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} > 1$$

и

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} > 2\operatorname{tg}\alpha \cdot 1.$$

512. Можно. Однако такое определение синуса числа привело бы к более сложным формулам в математическом анализе, чем принятое.

513. Неправильно. Радиан есть угол, принимаемый за единицу при радианном измерении углов, подобно тому, как угловой градус есть угол, принимаемый за единицу при градусном измерении углов. И подобно тому, как в градусном измерении угол выражается именованным числом (числом градусов), так и при радианном измерении угол выражается именованным числом (числом радианов).

514. В любом интервале, в котором определена эта функция. Так, например, $\operatorname{tg} x$ возрастает в интервалах $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, но нельзя сказать, что $\operatorname{tg} x$ возрастает в интервале $(0, \pi)$.

515. Задание синуса и косинуса вполне определяет, в какой четверти оканчивается угол. Можно также исходить из того, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \text{ а } \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

516. $\sin 36° = \sin 2 \cdot 18° = 2\sin 18° \cos 18°$; $\cos 54° =$
$= \cos 3 \cdot 18° = 4\cos^2 18° - 3\cos 18°$; $2\sin 18° \cos 18° =$
$= 4\cos^3 18° - 3\cos 18°$, $2\sin 18° = 4(1 - \sin^2 18°) - 3$,
$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$.

Так как $\sin 18° > 0$, то из полученного уравнения находим

$$\sin 18° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

517. Умножим и разделим данное выражение на $2\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда, обозначая искомую сумму буквой S, получим

$$S = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha + \ldots + \right.$$

$$\left. + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3}{2}\alpha + \cos\frac{3}{2}\alpha - \right.$$

$$\left. - \cos\frac{5}{2}\alpha + \ldots + \cos\frac{2n-1}{2}\alpha - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right) = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

518. Умножив и разделив данное выражение на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ и поступая далее, как в задаче 517, получим для искомой суммы

$$S=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

519. Пользуясь формулами косинуса и синуса двойного угла, преобразуем выражения для A_1, B_1 и C_1 так:

$$A_1=A\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+B\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2}+C\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=$$

$$=\frac{A+C}{2}+\frac{B}{2}\sin 2\alpha+\frac{A-C}{2}\cos 2\alpha;$$

$$B_1=C\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha-A\sin 2\alpha=B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha;$$

$$C_1=\frac{A+C}{2}-\frac{B}{2}\sin 2\alpha-\frac{A-C}{2}\cos 2\alpha;$$

$$B_1^2-4A_1C_1=[B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha]^2-$$

$$-4\left[\frac{A+C}{2}+\left(\frac{B}{2}\sin 2\alpha+\frac{A-C}{2}\cos 2\alpha\right)\right]\left[\frac{A+C}{2}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{B}{2}\sin 2\alpha+\frac{A-C}{2}\cos 2\alpha\right)\right]=B^2\cos^2 2\alpha-$$

$$-2B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha+(A-C)^2\sin^2 2\alpha-$$

$$-[(A+C)^2-(B\sin 2\alpha+(A-C)\cos 2\alpha)^2]=$$

$$=B^2(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha)+(A-C)^2(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha)-$$

$$-(A+C)^2=B^2+(A-C)^2-(A+C)^2=B^2-4AC.$$

520. $$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}=$$

$$=\frac{6\sin\beta}{4\sin\beta}=\frac{3}{2}.$$

521. Для $\varphi=0$ данное равенство приводится к виду

$$a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\ldots+a_n\cos\alpha_n=0.$$

Для $\varphi=\varphi_0\neq k\pi$ его можно записать так:

$$(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\ldots+a_n\cos\alpha_n)\cos\varphi_0-(a_1\sin\alpha_1+$$
$$+a_2\sin\alpha_2+\ldots+a_n\sin\alpha_n)\sin\varphi_0=0.$$

Учитывая первое равенство, а также и то, что $\sin\varphi_0\neq 0$, получим равенство

$$a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\ldots+a_n\sin\alpha_n=0.$$

Умножая теперь первое на $\cos\varphi$, где φ — любое число, а последнее на $\sin\varphi$ и вычитая из первого результата второй, получим

$$a_1\cos(\alpha_1+\varphi)+a_2\cos(\alpha_2+\varphi)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+\varphi)=0.$$

522. Находим $\cos x$ из данного равенства:

$$\cos x=\frac{\sin^2\beta\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\beta}=$$

$$=\frac{(1-\cos^2\beta)\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta}{(1-\cos^2\beta)\cos\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos\beta}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{(\cos\alpha-\cos\beta)(1+\cos\alpha\cos\beta)}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}.$$

Пользуемся формулой $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

Получим

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}=$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

523. $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\Theta}{2}=1-$

$$-(1-\cos\varphi)(1-\cos\Theta)=\cos\varphi+\cos\Theta-\cos\varphi\cos\Theta=$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}+\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}-\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Сокращая на $\cos\alpha\neq 0$, найдем $\cos\alpha=\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{1+\cos\beta\cos\gamma}$. Остается, как и в задаче 522, подставить $\cos\alpha$ в формулу $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

524. Данные равенства можно записать так:

$$\cos\Theta\cos\alpha+\sin\Theta\sin\alpha=a;\quad \sin\Theta\cos\beta-\cos\Theta\sin\beta=b.$$

Умножим первое равенство на $\sin\beta$, а второе на $\cos\alpha$ и результаты сложим; умножим опять те же равенства — первое на $\cos\beta$, а второе на $\sin\alpha$ и результаты вычтем почленно. После этого получим

$$\sin\Theta\cos(\alpha-\beta)=a\sin\beta+b\cos\alpha$$

и

$$\cos\Theta\cos(\alpha-\beta)=a\cos\beta-b\sin\alpha.$$

Возведем теперь полученные равенства в квадрат и результаты сложим почленно. Это даст:

$$\cos^2(\alpha-\beta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=(a\sin\beta+b\cos\alpha)^2+$$
$$+(a\cos\beta-b\sin\alpha)^2,\quad \cos^2(\alpha-\beta)=a^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)-$$
$$-2ab(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)+b^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha),$$
$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2.$$

525. $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{\cos x+\cos(x+2\varphi)}{\cos(x+\varphi)+\cos(x+3\varphi)}=\dfrac{2\cos(x+\varphi)\cos\varphi}{2\cos(x+2\varphi)\cos\varphi}=$

$=\dfrac{\cos(x+\varphi)}{\cos(x+2\varphi)}=\dfrac{b}{c}$. Отсюда $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$.

526. $2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=p;\quad 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=q.$

Отсюда $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{p}{q}$. Пользуясь теперь формулами $\sin 2x=$

$=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$ и $\cos 2x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}$, получим $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ и

$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$.

527. Так как $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

а $\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-1$, то данное равенство можно преобразовать так:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}=0,$$
$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{4}=0,$$
$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$
$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Но сумма квадратов вещественных чисел тогда и только тогда равна нулю, когда каждое из этих чисел равно нулю. Отсюда

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0\text{ и }\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Из первого, учитывая, что α и β — углы треугольника, получим $\alpha=\beta$. Но тогда, подставив $\alpha=\beta$ во второе, найдем: $\cos\alpha-\dfrac{1}{2}=0$,

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Итак, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$. Но тогда и третий угол равен $\frac{\pi}{3}$, т. е. треугольник правильный.

528. Стороны a, b и c образуют арифметическую прогрессию и потому связаны зависимостью $a - b = b - c$. Так как стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов, то из условия $a - b = b - c$ получим

$$\sin A - \sin B = \sin B - \sin C.$$

Отсюда:

$$2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

$$\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)\cos\frac{\pi - C}{2} = \sin\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{\pi - A}{2},$$

$$\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} =$$

$$= \left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}.$$

Разделив обе части последнего равенства на положительную величину $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, получим

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2} - \operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \operatorname{ctg}\frac{C}{2} - \operatorname{ctg}\frac{B}{2}.$$

529. Рассматривая данное равенство как уравнение относительно $\operatorname{tg} A$, определим из него $\operatorname{tg} A$. Получим

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} = -\operatorname{tg}(B + C) = \operatorname{tg}(-B - C).$$

Но если тангенсы равны, то углы связаны зависимостью $A = k\pi + (-B - C)$ или $A + B + C = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Наименьшие положительные углы, удовлетворяющие поставленным в задаче условиям, найдутся из системы: $A + B + C = 2\pi$, $2A = B + C$, $C = A + B$. Решив ее, найдем, что $A = \frac{2}{3}\pi$, $B = \frac{1}{3}\pi$, $C = \pi$. Если взять $k = 1$, то получили бы $C = \frac{\pi}{2}$, а для такого угла данное тождество теряет смысл.

530. $\sin A = \sin(\pi - B - C) = \sin(B + C) = \sin B\cos C +$

$+\cos B \sin C$. Но $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = t$. Отсюда:

$$\sin A = \frac{a}{t}, \quad \sin B = \frac{b}{t}, \quad \sin C = \frac{c}{t}.$$

Подставляя полученное в первое равенство и сокращая на t, найдем $a = b\cos C + c\cos B$. Так же найдем $b = c\cos A + a\cos C$ и $c = a\cos B + b\cos A$. Умножая первое из них на a, второе на b и третье на c и вычитая из первого результата два последних, получим

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A \text{ или } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

531. Из данных равенств получаем:

$$\cos\alpha\cos 3\theta + \sin\alpha\sin 3\theta = m\cos^3\theta;$$

$$\sin\alpha\cos 3\theta - \cos\alpha\sin 3\theta = m\sin^3\theta.$$

Умножая первое на $\cos 3\theta$, а второе на $\sin 3\theta$ и вычитая почленно, получим

$$\cos\alpha = m(\cos^3\theta\cos 3\theta - \sin^3\theta\sin 3\theta).$$

Преобразуем это выражение, пользуясь формулами косинуса и синуса тройного угла. Получим

$$\cos\alpha = m[\cos^3\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - \sin^3\theta(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)] =$$
$$= m[4(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta)].$$

Возведя данные равенства в квадрат и складывая, найдем

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta = \frac{1}{m^2}. \qquad (*)$$

Найдем теперь $\sin^4\theta + \cos^4\theta$:

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta =$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

$$\frac{1}{m^2} = \sin^6\theta + \cos^6\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 -$$

$$- 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

Отсюда

$$\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$$

и

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right). \qquad (**)$$

Пользуясь написанным выше выражением для $\cos\alpha$, а также равенствами (*) и (**), получим окончательно

$$m^2 + m\cos\alpha = 2.$$

532. Разделив первое уравнение на $\cos^2\Theta$, второе на $\cos^2\varphi$ и воспользовавшись формулой $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, найдем

$$(a-1)\operatorname{tg}^2\Theta = 1-b, \quad (b-1)\operatorname{tg}^2\varphi = 1-a,$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg}^2\Theta}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Но из третьего данного уравнения получим $\dfrac{\operatorname{tg}^2\Theta}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \dfrac{b^2}{a^2}$. Следовательно, $\dfrac{b^2}{a^2} = \left(\dfrac{1-b}{1-a}\right)^2$. Так как $a \neq b$, то $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{1-b}{1-a}$, откуда $a + b = 2ab$.

533. $\dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x} + \dfrac{\sin^4 x}{\cos^6 x} + \dfrac{6}{\cos^2 x} + \dfrac{4}{\sin^2 x} + \dfrac{4\sin^2 x}{\cos^4 x} =$

$$= \frac{1}{\sin^4 x \cos^6 x}(\cos^8 x + \sin^8 x + 6\cos^4 x \sin^4 x + 4\cos^6 x \sin^2 x +$$

$$+ 4\cos^2 x \sin^6 x) = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^4}{\sin^4 x \cos^6 x} = \frac{1}{\sin^4 x \cos^6 x}.$$

534. Перенесем все члены данного равенства в левую сторону, так что в правой будет 0, и приведем левую часть к виду, удобному для логарифмирования. Получим

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 - 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} - 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} =$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} -\right.$$

$$\left. - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) = 2\left[\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} -\right.$$

$$\left. - \left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2\right] = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} +\right.$$

$$+ \left.\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} -\right.$$

$$\left. - \sin\frac{\gamma}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right) = 0.$$

Но первый множитель положительный в силу того, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Поэтому должно быть:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2} = 0; \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2};$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Но

$$0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2},$$

а для острых углов из равенства их косинусов следует равенство углов. Поэтому

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \text{ и } \alpha+\beta+\gamma = \pi.$$

535. Достаточность. Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ рационален, то этого достаточно для того, чтобы $\sin x$ и $\cos x$ были рациональными, потому что существуют зависимости:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Необходимость. Если $\sin x$ и $\cos x$ рациональны, то необходимо будет рациональным и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, как это видно из формулы

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

При этом, конечно, имеются в виду такие x, при которых существует $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, т. е. $x \neq (2k+1)\pi$.

536. Нужно доказать две теоремы:

I. Дано: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$,

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi.$$

Доказать: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

II. Дано: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

Доказать: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Доказательство 1. Преобразуем выражение

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+$$

$$+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\cos^2\gamma+[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\cos\gamma=$$

$$=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+$$

$$+\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma+\cos^2\gamma=1+\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+$$

$$+\cos\gamma]+\cos\gamma[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma]=1+[\cos(\alpha-\beta)+$$

$$+\cos\gamma][\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma]=1+[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma][\cos(\pi-\gamma)+$$

$$+\cos\gamma]=1+[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma](-\cos\gamma+\cos\gamma)=1.$$

Доказательство II. Рассматривая равенство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$$

как квадратное уравнение относительно $\cos\alpha$, определим из него $\cos\alpha$. Получим

$$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma\pm\sqrt{\cos^2\beta\cos^2\gamma-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+1}=$$

$$=-\cos\beta\cos\gamma\pm\sqrt{\cos^2\beta(\cos^2\gamma-1)+1-\cos^2\gamma}=$$

$$=-\cos\beta\cos\gamma\pm\sqrt{(1-\cos^2\gamma)(1-\cos^2\beta)}=$$

$$=-\cos\beta\cos\gamma\pm\sqrt{\sin^2\gamma\sin^2\beta}=-\cos\beta\cos\gamma\pm\sin\beta\sin\gamma.$$

Но знак минус перед вторым слагаемым должен быть отброшен, так как при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ будет $\cos\alpha>0$, в то время как $-\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma<0$. Таким образом, остается только $\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma$, что можно записать так: $\cos\alpha=-\cos(\beta+\gamma)$ или $\cos\alpha=\cos[\pi-(\beta+\gamma)]$. Но $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$. Поэтому $0<\beta+\gamma<\pi$, $-\pi<-(\beta+\gamma)<0$, $0<\pi-(\gamma+\beta)<\pi$. Так как, кроме того, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то из равенства косинусов углов α и $\pi-(\beta+\gamma)$ следует равенство этих углов, т. е. $\alpha=\pi-(\beta+\gamma)$ и $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

537. Из данных равенств следует, что можно положить $a=\cos x$, $b=\sin x$; $\alpha=\cos y$, $\beta=\sin y$. Но тогда $|a\alpha+b\beta|=|\cos x\cos y+\sin x\sin y|=|\cos(x-y)|\leqslant 1$.

538—569. Указание. Напомним некоторые определения и формулы, относящиеся к обратным тригонометрическим функциям.

В тригонометрической функции $y = \sin x$ угол x (или число x) является аргументом, а y — функцией. Поменяем ролями функцию и аргумент. Тогда получим новую функцию, которая называется обратной для данной. При этом новую функцию также будем обозначать буквой y, а аргумент — буквой x. Тогда для обратной функции получим $x = \sin y$. Новая функция называется арксинусом и обозначается так:

$$y = \operatorname{Arc}\sin x.$$

Записи $y = \operatorname{Arc}\sin x$ и $x = \sin y$ равносильны, и поэтому можно сказать, что арксинус x есть угол (или число), синус которого равен x. Вместо слова «угол» часто употребляют слово «дуга».

Так как x есть синус, то допустимыми значениями для x являются лишь те, которые удовлетворяют неравенствам $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

По данному синусу можно найти не один угол, а бесконечное множество их. Поэтому говорят, что функция $y = \operatorname{Arc}\sin x$ — бесконечнозначная. То ее значение y_1, соответствующее данному x_1, которое удовлетворяет неравенствам $-\frac{\pi}{2} \leqslant y_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, называется главным значением функции $\operatorname{Arc}\sin x$, а если y_1 — угол, то главным углом. Множество всех главных значений $\operatorname{Arc}\sin x$, соответствующих всевозможным x от -1 до $+1$, называется главной ветвью $\operatorname{Arc}\sin x$ и обозначается $\arcsin x$. Функция $y = \arcsin x$ однозначная и возрастающая в своей области определения, т. е. в промежутке $[-1, 1]$.

Аналогично определяются функции $\operatorname{Arc}\cos x$ (арккосинус x), $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ (арктангенс x), $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$ (арккотангенс x) и их главные значения — $\arccos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$.

Функция $y = \arccos x$ определена, однозначна и убывает в промежутке $[-1, 1]$. Функция $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ определена, однозначна и возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Функция $y = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$ определена, однозначна и убывает в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Для обратных тригонометрических функций имеют место следующие зависимости:

$$\operatorname{Arc}\sin x = k\pi + (-1)^k \arcsin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{Arc}\cos x + 2k\pi \pm \arccos x, \quad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = k\pi + \operatorname{arc}\operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc}\operatorname{tg} x < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = k\pi + \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x, \quad 0 < \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x < \pi;$$

$$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x,$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x) = x, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x) = x.$$

Если $\sin\alpha = \sin\beta$, причем α и β — главные значения арксинуса, то обязательно $\alpha = \beta$. Это следует из однозначности функции $\arcsin x$. То же самое можно сказать и о других тригонометрических функциях.

538. Можно. Однако в этом случае функция и ее график не были бы непрерывны.

539. а) Положим $\arcsin x = \alpha$. Тогда $\sin\alpha = x$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x$. Так как по определению главного значения арксинуса $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \pi$. С другой стороны, всегда можно написать $x = \cos(\arccos x)$. Итак, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\arccos x)$, причем $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Но если косинусы некоторых углов равны и эти углы являются главными значениями арккосинуса, то тогда и углы равны. Поэтому получим:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x, \quad \alpha + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Так же доказывается и равенство «б».

540. а) Положим $\arccos(-x) = \alpha$. Тогда $\cos\alpha = -x$ и $\cos(\pi - \alpha) = x$. Так как по определению главного значения арккосинуса $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то $-\pi \leqslant -\alpha \leqslant 0$ и $0 \leqslant \pi - \alpha \leqslant \pi$. С другой стороны, можно написать $x = \cos(\arccos x)$. Итак, $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\arccos x)$, причем $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Но если косинусы некоторых углов равны и эти углы являются главными значениями арккосинуса, то и углы равны. Поэтому получим:

$$\pi - \alpha = \arccos x, \quad \alpha = \pi - \arccos x,$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Аналогично доказывается равенство «б».

541. а) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$. Перед корнем взят знак плюс потому, что $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Таким образом, вывод этой формулы свелся к написанию формулы $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, к подстановке в нее $\alpha = \arccos x$ и использованию формулы $\cos(\arccos x) = x$. Аналогично выводятся и все остальные формулы этой задачи. Докажем, например, формулу «г». Пишем формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$, подставляем $\alpha = \arcsin x$ и пользуемся формулой $\sin(\arcsin x) = x$.

Получим $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Перед корнем взят знак плюс потому, что когда $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sin\alpha$ имеют одинаковые знаки. Для получения другой формулы, содержащейся в равенстве «г», нужно взять формулу $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$, положить в ней $\alpha = \arccos x$ и воспользоваться формулой $\cos(\arccos x) = x$.

Само собой разумеется, что каждая из формул «а» — «е» имеет свою область допустимых значений для x. Так в «а», например, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, в «б» и «в» — все вещественные значения x.

542. Докажем, как образец, формулы «в». Прочие доказываются аналогично.

I. $\sin(\operatorname{arc tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (см. задачу 541, б). Угол $\operatorname{arc tg} x$ заключен между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ и имеет синус, равный $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Но в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, в силу однозначности функции арксинус, существует только один угол, синус которого равен $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Этот угол есть $\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Итак, $\operatorname{arc tg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Полученная формула верна при любых значениях x, в частности при $x > 0$.

II. $\cos(\operatorname{arc tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (см. задачу 541, в). Угол $\operatorname{arc tg} x$ при $x \geqslant 0$ заключен в промежутке между 0 и $\frac{\pi}{2}$ и имеет косинус, равный $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Но в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, в силу однозначности функции арккосинус, существует только один угол, косинус которого равен $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Этот угол есть $\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Итак, $\operatorname{arc tg} x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ для $x \geqslant 0$.

III. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc tg} x) = \frac{1}{x}$ (см. задачу 541, е). Угол $\operatorname{arc tg} x$ при $x > 0$ заключен между 0 и $\frac{\pi}{2}$ и имеет котангенс, равный $\frac{1}{x}$. Но в про-

межутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, в силу однозначности функции арккотангенс, существует только один угол, котангенс которого равен $\frac{1}{x}$. Этот угол есть $\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$. Итак, $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$, если $x > 0$.

Требование, чтобы было $x > 0$, обусловлено формой записи, а не существом дела. Так, например, если формулы «в» записать не в виде непрерывных равенств, а раздельно, то из трех равенств, которые только что были рассмотрены, лишь для равенства $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$ требуется условие $x > 0$, а другие верны в более широких пределах для x Именно, первое верно при всех x, а второе при $x \geqslant 0$.

543. $$\operatorname{arc\,cos}\left(\cos\frac{6}{5}\pi\right) = \operatorname{arc\,cos}\left[\cos\left(2\pi - \frac{6}{5}\pi\right)\right] = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{4}{5}\pi\right) = \frac{4}{5}\pi.$$

Было бы неправильно написать

$$\operatorname{arc\,cos}\left(\cos\frac{6}{5}\pi\right) = \frac{6}{5}\pi.$$

Равенство $\operatorname{arc\,cos}(\cos\alpha) = \alpha$ справедливо лишь в том случае, когда угол α заключен между 0 и π, потому что $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos}(\cos\alpha) \leqslant \pi$. Если угол α не находится в интервале $[0, \pi]$, то он является лишь одним из значений $\operatorname{Arc\,cos}(\cos\alpha)$.

544. Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sin}(\sin x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, то: 1) если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arc\,sin}(\sin x) = x$; 2) если $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$, то $\operatorname{arc\,sin}(\sin x) = \operatorname{arc\,sin}[\sin(\pi - x)] = \pi - x$, потому что в этом случае $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$; 3) если $\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\pi$, то $\operatorname{arc\,sin}(\sin x) = \operatorname{arc\,sin}[\sin(x - 2\pi)] = x - 2\pi$, потому что $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - 2\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Вообще, если $\frac{2k-1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{2k+1}{2}\pi$ или, иначе, $k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arc\,sin}(\sin x) = (-1)^{k-1}(k\pi - x)$, потому что в этом случае

$$\sin[(-1)^{k-1}(k\pi - x)] = (-1)^{k-1}\sin(k\pi - x) =$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot (-1)^k \sin(-x) = -(-1)^{k-1} \cdot (-1)^k \sin x =$$

$$= \sin x; \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant (-1)^{k-1}(k\pi - x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

545. Так как $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) < \frac{\pi}{2}$, то: 1) если $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, тогда $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$; 2) если $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, то $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(x-\pi)] = x - \pi$, так как $-\frac{\pi}{2} < x - \pi < \frac{\pi}{2}$; 3) если $\frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{2}\pi$, то $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(x-2\pi)] = x - 2\pi$, потому что $-\frac{\pi}{2} < x - 2\pi < \frac{\pi}{2}$; 4) если $-\frac{3}{2}\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(x+\pi)] = x + \pi$, так как $-\frac{\pi}{2} < x + \pi < \frac{\pi}{2}$. Вообще, если $\frac{2k-1}{2}\pi < x < \frac{2k+1}{2}\pi$, то $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(x - k\pi)] = x - k\pi$, потому что $-\frac{\pi}{2} < x - k\pi < \frac{\pi}{2}$.

546. I. Первое решение задачи будет основано на использовании формулы $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$, справедливой для $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Докажем ее.

$$\sqrt{1+\sin\alpha} = \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \pm\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

или

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha}.$$

Аналогично получим

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Но если

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ то } \cos\frac{\alpha}{2} \pm \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 0$$

и перед радикалами нужно взять знаки плюс. Поэтому получим

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}.$$

Положив в этой формуле $\alpha = \arcsin x$ и воспользовавшись равенством $\sin(\arcsin x) = x$, найдем, что

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}.$$

II. Пользуемся формулами: $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{2}$

и

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Пусть $\alpha = \arcsin x$, тогда $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$

и

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{2} =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-(1-x^2)}} - \sqrt{1-\sqrt{1-(1-x^2)}}}{2} =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{x^2}} - \sqrt{1-\sqrt{x^2}}}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+|x|} - \sqrt{1-|x|}}{2}.$$

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, $\sqrt{1+x} \geqslant \sqrt{1-x}$ и $\alpha \geqslant 0$. Поэтому в правой части равенства нужно перед дробью взять знак плюс. Получим

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}.$$

Если $x < 0$, то $|x| = -x$, $\sqrt{1+x} < \sqrt{1-x}$ и $\alpha < 0$. Следовательно, в правой части перед дробью нужно взять знак минус. Получим

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = -\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2} = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}.$$

547. $\arcsin\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=\arcsin\dfrac{\sin x-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)}{\sqrt{2}}=$

$$=\arcsin\frac{2\cos\frac{3}{4}\pi\sin\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)}{\sqrt{2}}=\arcsin\left[\sin\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\pi-x,$$

так как при условии $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$ выполняется соотношение $-\frac{\pi}{2}<\frac{3}{4}\pi-x<\frac{\pi}{2}$ (задача 544).

548. Положим $\operatorname{arc\,tg}x=\alpha$, $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\beta$ и найдем тангенс левой части доказываемого равенства. Получим

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Но

$$\operatorname{tg}\alpha=x,\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2};$$

$$\sin\beta=\frac{2x}{1+x^2};\ \cos\beta=+\sqrt{1-\cos^2\beta}=$$

$$=\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}=\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}=\frac{x^2-1}{x^2+1}\ \text{(так как } x>1);$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{2x}{x^2-1}.$$

$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{x^2-1}=0$; $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=0$. Отсюда видим, что и $2\alpha+\beta=k\pi$. Так как $x>1$, то $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; $0<2\alpha+\beta<\frac{3}{2}\pi$.

Отсюда следует, что $k=1$ и $2\alpha+\beta=\pi$, что и требовалось доказать.

549. Воспользуемся формулой

$$\sin\frac{3}{2}\alpha=3\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^3\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha),$$

положив в ней $\alpha = \arcsin x$ Отсюда получим $\sin\alpha = x$, и так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha = +\sqrt{1-x^2}$. Что касается множителя $\sin\frac{\alpha}{2}$, то для него будет следующее выражение:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

Когда $x \geqslant 0$, тогда будет и $\alpha \geqslant 0$, так что в правой части нужно взять перед дробью знак плюс. С другой стороны, при $x \geqslant 0$ будет $\sqrt{x^2} = x$ и формула примет вид

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

Когда $x < 0$, тогда будет и $\alpha < 0$ и в правой части равенства нужно взять перед дробью знак минус. Но в этом случае $\sqrt{x^2} = -x$ и мы приходим снова к такой же формуле:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

Подставляя найденные значения $\cos\alpha$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$ в формулу для $\sin\frac{3}{2}\alpha$, получим

$$\sin\left(\frac{3}{2}\arcsin x\right) = \frac{x(1+2\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

550. Положим $\alpha = \arcsin x$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. При этих условиях для α будем иметь

$$\cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

и

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}.$$

Поэтому

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}=\sqrt{\frac{1-(1-x^2)}{2(1-\sqrt{1-x^2})}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}}=\frac{|x|}{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}}.$$

551. Обозначим $\cos(n\arccos x)=T_n$. В формуле $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ положим $\alpha=\arccos x$. Тогда, учитывая, что $\cos(\arccos x)=x$, получим $T_2=2x^2-1$. Точно так же из формулы $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ найдем $T_3=4x^3-3x$. С помощью формулы $\cos(n+1)\alpha=2\cos n\alpha\cos\alpha-\cos(n-1)\alpha$, положив в ней $\alpha=\arccos x$, получим равенство $T_{n+1}=2T_n\cdot x-T_{n-1}$. Полагая в нем $n=3, 4, 5, 6$ и учитывая найденные значения T_2 и T_3, получим последовательно:

$$T_4=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)=8x^4-8x^2+1;$$

$$T_5=16x^5-20x^3+5x;\ T_6=32x^6-48x^4+18x^2-1;$$

$$T_7=\cos(7\arccos x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x.$$

552. Пользуясь формулами задачи 541, получим

$$\cos(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)=\cos(\operatorname{arctg}x)\cos(\operatorname{arctg}y)-$$

$$-\sin(\operatorname{arctg}x)\sin(\operatorname{arctg}y)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}-$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}*.$$

Эта формула имеет смысл при любых x и y.

553. $\operatorname{tg}(2\arcsin x)=\dfrac{2\operatorname{tg}(\arcsin x)}{1-\operatorname{tg}^2(\arcsin x)}=$

$$=\frac{\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\dfrac{x^2}{1-x^2}}=\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}.$$

Здесь были использованы формулы задачи 541*.

Доказанное равенство имеет смысл, если $-1\leqslant x\leqslant 1$, но $x\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

---

* О другом способе решения см. замечание к задаче 555.

554. $\sin(2\operatorname{arc\,tg} x) = 2\sin(\operatorname{arc\,tg} x)\cos(\operatorname{arc\,tg} x) =$

$$= 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Здесь были использованы формулы задачи 541*.

Доказанное равенство имеет смысл при всех x.

555. Положим $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = x$, $\operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{3} = y$. Тогда, пользуясь определением арктангенса, можем написать

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}.$$

Поэтому получим:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+(2\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

причем перед корнями берем знак плюс, так как главные значения углов, имеющих положительные тангенсы

$$\left(\frac{1}{3} \text{ и } 2\sqrt{3}\right),$$

являются острыми углами (углами, лежащими в первом квадранте). Теперь будем иметь

$$\sin\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right) + \cos(\operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{3}) = \sin 2x +$$

$$+ \cos y = 2\sin x \cos x + \cos y = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Замечание. Решение этой задачи было бы короче, если использовать формулы задачи 541. Однако, чтобы ими пользоваться, нужно или помнить эти формулы, или иметь их под рукой. Задачи 552—554 были решены именно с использованием формул задачи 541, но они могут быть решены и способом, примененным здесь.

---

* О другом способе решения см. замечание к задаче 555.

556. Положим $\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}=x$, $\arcsin\frac{5}{13}=y$. Тогда, пользуясь определениями арктангенса и арксинуса, можем написать

$$\operatorname{tg}x=\frac{3}{4},\quad \sin y=\frac{5}{13}.$$

Поэтому получим:

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{4}{5},$$

$$\sin x=\operatorname{tg}x\cos x=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5},$$

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2y}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

Перед корнями взяты знаки плюс, потому что $0<x<\frac{\pi}{2}$ и $0<y<\frac{\pi}{2}$. Теперь будем иметь

$$\sin\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)=\sin 2x+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=$$

$$=2\sin x\cos x+\frac{\sin y}{1+\cos y}=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{5}{13\left(1+\frac{12}{13}\right)}=$$

$$=\frac{24}{25}+\frac{5}{25}=\frac{29}{25}.$$

557. Положим $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=x=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}=y$ Отсюда $\operatorname{tg}x=1$, $\operatorname{tg}y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ Найдем теперь тангенс левой части подлежащего доказательству равенства. Получим

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

Следовательно, $x+y=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, где k — целое число

или 0. Но $0 < y < \frac{\pi}{4}$, а $x = \frac{\pi}{4}$. Поэтому $0 < x + y < \frac{\pi}{2}$ и k может быть равно только нулю. Отсюда получаем $x + y = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, т. е. то, что требовалось доказать.

558. Вычислим тангенс данного выражения. Получим

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2) + \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 3)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2)\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 3)} =$$

$$= \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1.$$

Следовательно, $\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3 = k\pi - \frac{\pi}{4}$, где k — целое число или 0. Но $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arc\,tg} 2 < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arc\,tg} 3 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3 < \pi$. Но между $\frac{\pi}{2}$ и π есть только одно число, тангенс которого равен -1. Это число $\frac{3}{4}\pi$. Поэтому получим $\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3 = \frac{3}{4}\pi$.

559. Пусть $\arcsin x = y$. Тогда $\sin y = x$, $\sin 2y = 2\sin y \cos y = 2x\sqrt{1-x^2}$. Отсюда

$$2y = k\pi + (-1)^k \arcsin 2x\sqrt{1-x^2},$$

где k — целое число или нуль. Но из условия $x^2 < \frac{1}{2}$ вытекает, что $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{\pi}{4} = y < \frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2} < 2y < \frac{\pi}{2}$ и $k = 0$. Поэтому $2y = 2\arcsin x = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$. Теперь можно написать $\arcsin x + 3\arccos x + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 3(\arcsin x + \arccos x) = \frac{3\pi}{2}$.*

560. Положим $\arcsin x = \alpha$, $\arcsin y = \beta$. Тогда будем иметь: $\sin\alpha = x$, $\cos\alpha = +\sqrt{1-x^2}$, $\sin\beta = y$, $\cos\beta = +\sqrt{1-y^2}$, причем перед обоими радикалами ставим знак плюс, потому что $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$, а косинусы таких углов положительны. Воспользуемся теперь формулой синуса суммы двух углов.

* Эту задачу можно решить и с помощью формулы задачи 560.

Получим

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta =$$
$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha + \beta = k\pi + (-1)^k \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),$$

где k — целое число или нуль. Но

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и сумма $\alpha + \beta$ должна удовлетворять одному из следующих соотношений:

$$1.\ -\pi \leqslant \alpha + \beta < -\frac{\pi}{2};$$

$$2.\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha + \beta \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$3.\ \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta \leqslant \pi.$$

Легко убедиться, что при соотношениях 1, 2 и 3 будет соответственно $k = -1$, $k = 0$ и $k = 1$, так что получатся формулы:

$$\text{I.}\ \alpha + \beta = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right);$$
$$\text{II.}\ \alpha + \beta = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right);$$
$$\text{III.}\ \alpha + \beta = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Эти три формулы могут быть сведены в следующую одну: $\arcsin x + \arcsin y = \eta \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi$, причем $\eta = 1$, $\varepsilon = 0$ для соотношения 2; $\eta = -1$, $\varepsilon = -1$ для соотношения 1; $\eta = -1$, $\varepsilon = 1$ для соотношения 3. Выясним, какие должны быть зависимости между x и y, чтобы имели место эти формулы.

а) Пусть $\eta = 1$, $\varepsilon = 0$, т. е. выполняется соотношение 2. Тогда $\cos(\alpha + \beta) \geqslant 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\cos(\alpha + \beta) \geqslant 0$, то имеет место соотношение 2, а следовательно, $\eta = 1$, $\varepsilon = 0$. Но $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy$. Поэтому для того, чтобы выполнялось неравенство $\cos(\alpha + \beta) \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy \geqslant 0. \qquad (*)$$

Во-первых, это всегда будет выполняться, если $xy \leqslant 0$. Во-вторых, это будет выполняться и при $xy > 0$, если $1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ или $x^2 + y^2 \leqslant 1$, что становится очевидным, если неравенство (*) переписать так:

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2 + x^2y^2} \geqslant xy.$$

б) Пусть теперь $\eta = -1$, $\varepsilon = -1$ или $\eta = -1, \varepsilon = 1$, т. е. выполняются соотношения 1 или 3. Нетрудно видеть, что для этого необходимо и достаточно, чтобы было $\cos(\alpha + \beta) < 0$ или $\sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-y^2} - xy < 0$. Здесь $xy > 0$. Переписывая последнее неравенство в виде

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2 + x^2y^2} < xy,$$

убеждаемся в том, что $1 - x^2 - y^2 < 0$ или $x^2 + y^2 > 1$. Если же учесть, что соотношение 1 имеет место лишь тогда, когда α и β, а следовательно, и x, и y отрицательны, а соотношение 3 — лишь тогда, когда α и β, а следовательно, и x, и y положительны, то можно сказать $\eta = -1$, $\varepsilon = -1$, если $x^2 + y^2 > 1$ и $x < 0$, $y < 0$, а $\eta = -1$, $\varepsilon = 1$, если $x^2 + y^2 > 1$ и $x > 0$, $y > 0$.

561. Для упрощения выражения $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$ воспользуемся формулой задачи 560. Так как $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 < 1$, в этой формуле нужно положить $\eta = 1$ и $\varepsilon = 0$. Поэтому имеем

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} =$$

$$= \arcsin\left(\frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{25}{169}} + \frac{5}{13}\sqrt{1 - \frac{16}{25}}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5}\right) = \arcsin \frac{63}{65}.$$

Преобразуем полученный арксинус в арккосинус. Это можно сделать с помощью формулы $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$ задачи 542, так как $\frac{63}{65} > 0$. Получим

$$\arcsin \frac{63}{65} = \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{63}{65}\right)^2} = \arccos \frac{16}{65}.$$

Итак, имеем

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} =$$

$$= \arccos \frac{16}{65} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание 1. То, что при сложении $\arcsin x$ и $\arcsin y$ можно пользоваться формулой $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$, можно обосновать и иначе, чем сделано в решении этой задачи. А именно: последняя формула верна, если

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

В данном случае

$$\arcsin\frac{4}{5} < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arcsin\frac{5}{13} < \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

и, следовательно,

$$0 < \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} < \frac{\pi}{2}.$$

Замечание 2. Само собой разумеется, что эту задачу можно решить без ссылки на формулу задачи 560, а пользуясь лишь определениями обратных тригонометрических функций и их главных значений. Для этого можно поступить так: положить $\arcsin\frac{4}{5} = \alpha$, $\arcsin\frac{5}{13} = \beta$, найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ и воспользоваться формулой синуса суммы двух углов. Это даст $\sin(\alpha+\beta) = \frac{63}{65}$, откуда $\alpha+\beta = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{63}{65}$. Из условия же $0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ установим, что $k = 0$. Сложив теперь по тому же способу $\arcsin\frac{63}{65}$ и $\arcsin\frac{16}{65}$, докажем тождество.

Этим способом была решена задача 548.

562. Пользуясь формулой $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, можно написать $\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \pi - \arcsin x - \arcsin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)$. Теперь достаточно найти сумму $\arcsin x + \arcsin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)$. Воспользуемся формулой задачи 560. Для выяснения значений η и ε вычислим величину суммы квадратов аргументов:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{3-3x^2} +$$

$$+ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{1-x^2} \geqslant \frac{3}{4} +$$

$$+ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{5}{4} > 1,$$

потому что из $x \geqslant \frac{1}{2}$ вытекает, что $4x^2 \geqslant 1$, $3x^2 \geqslant 1 - x^2$,

$$\sqrt{3}x \geqslant \sqrt{1-x^2} \text{ и } \frac{\sqrt{3}}{2} x \sqrt{1-x^2} \geqslant \frac{1}{2}(1-x^2).$$

Так как, кроме того, аргументы положительны, то $\eta = -1$, $\varepsilon = 1$. Итак,

$$\arcsin x + \arcsin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \pi -$$

$$- \arcsin\left[x \sqrt{1-\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{1-x^2}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)\right].$$

Но

$$1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{3}x - \sqrt{1-x^2})^2$$

и так как

$$\sqrt{3}x \geqslant \sqrt{1-x^2}, \text{ то } \sqrt{1-\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{1-x^2}).$$

Поэтому

$$\arcsin x + \arcsin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) =$$

$$= \pi - \arcsin\left[\frac{x}{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{1-x^2}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)\sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$= \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

Отсюда

$$\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}.$$

Замечание. Возможно и более короткое решение, причем без ссылки на формулу задачи 560. Действительно, заметив, что

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos(\arccos x) = x,$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},$$

можем написать

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\arccos x\right);\ \arccos x+$$

$$+\arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\arccos x+$$

$$+\arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\arccos x\right)\right]=\arccos x+$$

$$+\frac{\pi}{3}-\arccos x=\frac{\pi}{3},$$

так как

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant\arccos x\leqslant\frac{\pi}{3}$$

и

$$0<\frac{\pi}{3}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{3}$$

(см решение задачи 543).

563. Положим $\operatorname{arc\,tg} x=\alpha$, $\operatorname{arc\,tg} y=\beta$. Тогда будем иметь $\operatorname{tg}\alpha=x$, $\operatorname{tg}\beta=y$. Пользуясь формулой тангенса суммы двух углов, получим

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y)=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{x+y}{1-xy}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha+\beta=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy},$$

где k — целое число или нуль. Но

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$$

и сумма $\alpha+\beta$ должна удовлетворять одному из следующих соотношений:

1. $-\pi<\alpha+\beta<-\frac{\pi}{2}$;

2. $-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$;

3. $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$.

Легко убедиться, что при соотношениях 1, 2 и 3 будет соответственно $k = -1$, $k = 0$ и $k = 1$, так что получатся формулы:

$$\text{I. } \alpha + \beta = -\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy};$$

$$\text{II. } \alpha + \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy};$$

$$\text{III. } \alpha + \beta = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Эти три формулы могут быть сведены в следующую одну:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

причем $\varepsilon = 0$ для соотношения 2; $\varepsilon = -1$ для соотношения 1; $\varepsilon = 1$ для соотношения 3. Выясним, какие должны быть зависимости между x и y, чтобы имели место эти формулы.

а) Пусть $\varepsilon = 0$, т. е. выполняется соотношение 2. Тогда $\cos(\alpha + \beta) > 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\cos(\alpha + \beta) > 0$, то имеет место соотношение 2, а следовательно, $\varepsilon = 0$. Но $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, а так как $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = y$, то

$$\cos\alpha = \frac{1}{+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \sin\beta = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

и

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.$$

Поэтому, для того чтобы выполнялось неравенство $\cos(\alpha + \beta) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} > 0$$

а это будет при $1 - xy > 0$ или $xy < 1$.

Заметим, что при вычислении $\cos\alpha$ перед радикалом был взят знак плюс по той причине, что при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ будет $\cos\alpha > 0$. То же самое можно сказать и относительно $\cos\beta$.

б) Пусть теперь $\varepsilon = -1$ или $\varepsilon = 1$, т. е. выполняются соотношения 1 или 3. Нетрудно видеть, что для этого необходимо и достаточно, чтобы было $\cos(\alpha + \beta) < 0$ или $\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} < 0$.

Последнее же будет выполняться при $1 - xy < 0$ или $xy > 1$. Если же учесть, что соотношение 1 имеет место лишь тогда, когда α и β, а следовательно, и x, и y отрицательны, а соотношение 3 — лишь тогда, когда α и β, а следовательно, и x, и y положительны, то можно сказать, что $\varepsilon = -1$, если $xy > 1$ и $x < 0$, а $\varepsilon = 1$, если $xy > 1$ и $x > 0$.

564. Полагая в формуле задачи 563 $x = y = \frac{2}{3}$ и замечая, что в этом случае $xy < 1$, получим $2\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{12}{5}$. Но $\operatorname{arc\,tg}\frac{12}{5} = \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{144}{25}}} = \operatorname{arc\,cos}\frac{5}{13}$ (см. задачу 542, в). Поэтому $\operatorname{arc\,sin}\frac{5}{13} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3} = \operatorname{arc\,sin}\frac{5}{13} + \operatorname{arc\,cos}\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$.

Замечание. Эту задачу можно решить и не пользуясь формулой сложения арктангенсов. Для этого достаточно доказать, что $\sin(\alpha + 2\beta) = 1$, где $\alpha = \operatorname{arc\,sin}\frac{5}{13}$, а $\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}$. Отсюда будет следовать, что $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$.

565. Полагая в формуле задачи 563 $x = \frac{1}{3}$ и $y = \frac{1}{5}$ и замечая, что $xy < 1$, получим

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{7}.$$

Прибавляя к этому результату $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$ и снова пользуясь той же формулой для $x = \frac{4}{7}$ и $y = \frac{1}{7}$, получим

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} = \operatorname{arc\,tg}\frac{7}{9}.$$

Наконец, складывая $\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{9}$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}$, получим окончательно

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{7}{9} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Замечание. Задачу можно решить, не пользуясь готовой формулой сложения арктангенсов, а применив метод, которым была решена задача 558.

566. Пользуемся три раза формулой суммы арктангенсов (см. задачу 563) для случая $xy < 1$. Получим:

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = 2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}\right) =$$

$$= 2\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5\left(1 - \frac{1}{25}\right)} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12} = \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12} +$$

$$+ \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2 \cdot 5}{12\left(1 - \frac{25}{144}\right)} = \operatorname{arc\,tg}\frac{120}{119};$$

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} = \operatorname{arc\,tg}\frac{120}{119} + \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{239}\right) =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{119 \cdot 239 + 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = \operatorname{arc\,tg}\frac{119 \cdot 239 + 120}{119 \cdot 239 + 120} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

567. $2\operatorname{arc\,tg} 10$ преобразуем по формуле суммы арктангенсов, полагая в формуле задачи 563 $x = y = 10$ (случай $xy > 1$, $x > 0$), а $\operatorname{arc\,sin}\frac{20}{101}$ преобразуем в арктангенс с помощью формулы задачи 542, а. Получим

$$2\operatorname{arc\,tg} 10 + \operatorname{arc\,sin}\frac{20}{101} = (\operatorname{arc\,tg} 10 + \operatorname{arc\,tg} 10) +$$

$$+ \operatorname{arc\,tg}\frac{20}{101\sqrt{1 - \left(\frac{20}{101}\right)^2}} = \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{10 + 10}{1 - 10 \cdot 10} +$$

$$+ \operatorname{arc\,tg}\frac{20}{99} = \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{20}{99} + \operatorname{arc\,tg}\frac{20}{99} = \pi$$

Замечание. Задачу можно решить, показав, что $\sin(2\alpha + \beta) =$

$= 0$, где $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 10$, а $\beta = \arcsin \frac{20}{101}$. Отсюда будет следовать равенство $2\alpha + \beta = k\pi$ и останется лишь показать, что $k = 0$.

568. На основании формулы $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$, получим $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} x$. Так как здесь предполагается $x > 0$, то $\operatorname{arc\,ctg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ (см. задачу 542, г). Теперь будем иметь $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$.

569. Пользуясь формулой $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$, можем написать $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} x$. Но $\operatorname{arc\,tg} x = \pi - \operatorname{arc\,ctg}(-x)$ (см. задачу 540, б), а $\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{-x}$ (см. задачу 542, г), так как $x < 0$ и, следовательно, $-x > 0$. Теперь будем иметь

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - [\pi - \operatorname{arc\,ctg}(-x)] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{-x} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}.$$

VIII.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

570. $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x$,

$$\sin 2x (2\sin x \sin 3x - \cos 2x) = 0,$$

$$\sin 2x (\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0, \quad \sin 2x \cos 4x = 0.$$

а) $\sin 2x = 0$, $2x = k\pi$, $x_1 = \frac{k\pi}{2}$;

б) $\cos 4x = 0$, $4x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$; $x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{8}$.

571. $3(1 - \sin x) = 2\cos^2 x$, $3(1 - \sin x) = 2(1 - \sin^2 x)$,

$$(1 - \sin x)(1 - 2\sin x) = 0.$$

а) $1-\sin x=0$, $\sin x=1$, $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{(4k+1)\pi}{2}$;

б) $1-2\sin x=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$, $x_2=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$.

572. $$\frac{\sin\frac{3}{5}x\cos\frac{5}{3}x}{\cos\frac{3}{5}x\sin\frac{5}{3}x}=1-\frac{1}{\cos\frac{3}{5}x\sin\frac{5}{3}x},$$

$$\cos\frac{3}{5}x\sin\frac{5}{3}x-\sin\frac{3}{5}x\cos\frac{5}{3}x=1,$$

$$\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{3}{5}x\right)=1,\quad \sin\frac{16}{15}x=1,\quad \frac{16}{15}x=2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{16}{15}x=\frac{4k+1}{2}\pi,\quad x=\frac{15}{32}(4k+1)\pi.$$

573. $$\sin(x-20^\circ)\cos[90^\circ-(x+25^\circ)]=$$
$$=\cos[90^\circ-(70^\circ+x)]\sin(65^\circ-x),$$
$$\sin(x-20^\circ)\cos(65^\circ-x)-\cos(x-20^\circ)\sin(65^\circ-x)=0,$$
$$\sin(x-20^\circ-65^\circ+x)=0,$$
$$\sin(2x-85^\circ)=0,\quad 2x-85^\circ=180^\circ k,$$
$$2x=180^\circ k+85^\circ,\quad x=90^\circ k+42{,}5^\circ.$$

574. $\operatorname{tg}(x+30^\circ)\operatorname{tg}(x-60^\circ)=\operatorname{ctg}[90^\circ-(x+30^\circ)]\times$
$\times\operatorname{tg}(x-60^\circ)=\operatorname{ctg}(60^\circ-x)\operatorname{tg}(x-60^\circ)=-1.$

Отсюда видно, что данное уравнение не имеет решений.

575. $$\sin 2x+\sin x+1+\cos 2x+\cos x=0,$$
$$2\sin x\cos x+\sin x+2\cos^2 x+\cos x=0,$$
$$\sin x(2\cos x+1)+\cos x(2\cos x+1)=0,$$
$$(2\cos x+1)(\sin x+\cos x)=0.$$

а) $2\cos x+1=0$, $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x_1=2k\pi\pm\frac{2}{3}\pi$;

б) $\sin x+\cos x=0$, $\operatorname{tg}x=-1$, $x_2=k\pi-\frac{1}{4}\pi$.

576. $$\sin 2x+2\sin 2x\cos x=\cos x+2\cos^2 x,$$
$$\sin 2x(1+2\cos x)=\cos x(1+2\cos x),$$
$$(1+2\cos x)(2\sin x\cos x-\cos x)=0,$$
$$(1+2\cos x)\cos x(2\sin x-1)=0.$$

а) $1 + 2\cos x = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 2k\pi \pm \frac{2}{3}\pi$;

б) $\cos x = 0$, $x_2 = \frac{2k+1}{2}\pi$;

в) $2\sin x - 1 = 0$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $x_3 = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$.

577. $\sin 3x + \sin x - \cos x = 0$, $2\sin 2x \cos x - \cos x = 0$,

$$\cos x (2\sin 2x - 1) = 0.$$

а) $\cos x = 0$, $x_1 = \frac{2k+1}{2}\pi$;

б) $2\sin 2x - 1 = 0$, $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $2x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$,

$$x_2 = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12}.$$

578. $\cos 7x + \cos x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$,

$2\cos 4x \cos 3x - \cos 4x = 0$, $\cos 4x (2\cos 3x - 1) = 0$.

а) $\cos 4x = 0$, $4x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $x_1 = \frac{2k+1}{8}\pi$;

б) $2\cos 3x - 1 = 0$, $\cos 3x = \frac{1}{2}$ $3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$,

$$x_2 = \frac{2}{3}k\pi \pm \frac{\pi}{9}.$$

579. $\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{2}\sin 2x (-\cos 2x) = \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{4}, \quad \sin 4x = -1,$$

$$4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad 4x = \frac{4k-1}{2}\pi, \quad x = \frac{4k-1}{8}\pi.$$

580. $2\cos 4x \cos x + 2\sin 4x \cos x = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 4x + \right.$

$\left. + \sin\frac{\pi}{4}\sin 4x\right)$, $\cos x (\cos 4x + \sin 4x) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 4x + \sin 4x)$, $(\cos 4x + \sin 4x)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

а) $\cos 4x + \sin 4x = 0$, $\operatorname{tg} 4x = -1$, $4x = k\pi - \frac{\pi}{4}$,

$$x_1 = \frac{4k-1}{16}\pi;$$

б) $\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} = \frac{8k \pm 1}{4}\pi$.

581. $\sin x + \sin 3x + \sin 2x + \sin 4x = 0$,

$2\sin 2x \cos x + 2\sin 3x \cos x = 0$, $\cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 0$,

$$2\cos x \sin \frac{5}{2}x \cos \frac{1}{2}x = 0.$$

а) $\cos x = 0$, $x_1 = \frac{2k+1}{2}\pi$;

б) $\sin \frac{5}{2}x = 0$, $\frac{5}{2}x = k\pi$, $x_2 = \frac{2}{5}k\pi$;

в) $\cos \frac{1}{2}x = 0$, $\frac{1}{2}x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $x_3 = (2k+1)\pi$.

582. $\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2}$, $\cos 2x - \cos 4x - 1 = 0$,

$\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0$, $\cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$.

а) $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $x_1 = \frac{2k+1}{4}\pi$;

б) $1 - 2\cos 2x = 0$, $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$,

$$2x = \frac{6k \pm 1}{3}\pi, \quad x_2 = \frac{6k \pm 1}{6}\pi.$$

583. $\cos^2 x \cos x \sin 3x + \sin^2 x \sin x \cos 3x = \frac{3}{4}$, $\cos^2 x \cdot \frac{1}{2} \times$

$\times(\sin 4x + \sin 2x) + \sin^2 x \cdot \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x) = \frac{3}{4}$,

$\sin 4x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin 2x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2}$,

$\sin 4x + \sin 2x \cos 2x = \frac{3}{2}$, $\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{3}{2}$,

$\frac{3}{2}\sin 4x = \frac{3}{2}$, $\sin 4x = 1$, $4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{4k+1}{8}\pi$.

584. $\frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 9x) +$

$+ \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)$, $\cos 2x - \cos 3x + \cos 9x - \cos 8x = 0$,

$$\cos 2x - \cos 8x + \cos 9x - \cos 3x = 0,$$
$$2\sin 5x \sin 3x - 2\sin 6x \sin 3x = 0,$$
$$\sin 3x (\sin 6x - \sin 5x) = 0, \quad 2\sin 3x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{11}{2} x = 0.$$

а) $\sin 3x = 0, \quad 3x = k\pi, \quad x_1 = \frac{k\pi}{3};$

б) $\cos \frac{11}{2} x = 0, \quad \frac{11}{2} x = \frac{2k+1}{2}\pi, \quad x_2 = \frac{2k+1}{11}\pi;$

в) $\sin \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = k\pi, \quad x_3 = 2k\pi.$

Но при $k = 6n$ $x_1 = 2n\pi$. Поэтому x_3 заключается в x_1 и все решения содержатся в формулах: $x_1 = \frac{k\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{2k+1}{11}\pi.$

585. $\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2,$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0,$$
$$2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x \cos x = 0,$$
$$\cos x (\cos 3x + \cos 7x) = 0, \quad 2\cos x \cos 2x \cos 5x = 0.$$

а) $\cos 5x = 0, \quad 5x = \frac{2k+1}{2}\pi, \quad x_1 = \frac{2k+1}{10}\pi;$

б) $\cos 2x = 0, \quad x_2 = \frac{2k+1}{4}\pi;$

в) $\cos x = 0, \quad x_3 = \frac{2k+1}{2}\pi.$

Но при $k = 5n + 2$ $x_1 = \frac{2n+1}{2}\pi = x_3$. Поэтому все решения уравнения содержатся в формулах:

$$x_1 = \frac{2k+1}{10}\pi; \quad x_2 = \frac{2k+1}{4}\pi.$$

586. $\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2},$

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x,$$
$$2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cos x, \quad \cos x (\cos 3x - \cos 7x) = 0,$$
$$2\cos x \sin 2x \sin 5x = 0.$$

а) $\sin 5x = 0, \quad 5x = k\pi, \quad x_1 = \frac{k\pi}{5};$

б) $\sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi, \quad x_2 = \frac{k\pi}{2};$

в) $\cos x = 0, \quad x_3 = \frac{2k+1}{2}\pi.$

Но при $k = 2n+1$ $x_2 = \frac{2n+1}{2}\pi = x_3$. Кроме того, x_2 при $k = 2n$ дает те же значения, что и x_1 при $k = 5n$. Поэтому все решения уравнения содержатся в формулах:

$$x_1 = \frac{k\pi}{5}; \quad x_2 = \frac{2k+1}{2}\pi.$$

587. $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x),$

$$\sin^2 2x - \frac{\cos 2x - \cos 6x}{2} = 0, \quad \sin^2 2x - \sin 2x \sin 4x = 0,$$

$$\sin 2x (\sin 4x - \sin 2x) = 0, \quad 2\sin 2x \sin x \cos 3x = 0.$$

а) $\sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi, \quad x_1 = \frac{k\pi}{2};$

б) $\cos 3x = 0, \quad 3x = \frac{2k+1}{2}\pi, \quad x_2 = \frac{2k+1}{6}\pi;$

в) $\sin x = 0, \quad x_3 = k\pi.$

При $k = 2n$ $x_1 = n\pi$ и содержится в x_3. При $k = 2n+1$ x_1 содержится в x_2, если в x_2 положить $k = 3n+1$. Поэтому все решения уравнения содержатся в формулах:

$$x_1 = \frac{2k+1}{6}\pi, \quad x_2 = k\pi.$$

588. $\sin^2 2x = 2 - 2\sin^2 x, \quad 4\sin^2 x \cos^2 x = 2\cos^2 x,$

$$\cos^2 x (2\sin^2 x - 1) = 0, \quad \cos^2 x (-\cos 2x) = 0, \quad \cos^2 x \cos 2x = 0.$$

а) $\cos^2 x = 0, \quad \cos x = 0, \quad x_1 = \frac{2k+1}{2}\pi;$

б) $\cos 2x = 0, \quad 2x = \frac{2k+1}{2}\pi, \quad x_2 = \frac{2k+1}{4}\pi.$

589. $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} + 2\sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} - 2\sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} =$

$$= \frac{5}{8}, \quad \left(\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 \frac{2}{3}x = \frac{5}{8}, \quad 1 - \frac{1}{2}\sin^2 \frac{2}{3}x =$$

$= \frac{5}{8}$, $\sin^2 \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}$, $\sin \frac{2}{3}x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{2}{3}x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$,

$$\frac{2}{3}x = \frac{3k \pm 1}{3}\pi, \quad x = \frac{3k \pm 1}{2}\pi.$$

590. $\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$, $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$, $1 - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = 0$,

$\sin^2 2x - 8\sin 2x + 4 = 0$, $\sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}$ $(4 + 2\sqrt{3} > 1$ и поэтому отброшено). $2x = k\pi + (-1)^k \arcsin(4 - 2\sqrt{3})$,

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(4 - 2\sqrt{3}).$$

591. $2(\sin 2x + 1 - 1) = 3(\sin x + \cos x)$,

$2(2\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 1) = 3(\sin x + \cos x)$,

$2[(\sin x + \cos x)^2 - 1] = 3(\sin x + \cos x)$. Положив $\sin x + \cos x = y$ и сделав преобразования, придем к уравнению: $2y^2 - 3y - 2 = 0$, $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 2$. Отсюда $\cos x + \sin x = -\frac{1}{2}$ и $\cos x + \sin x = 2$. Решаем первое: $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x = k\pi - (-1)^k \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$. Равенство $\sin x + \cos x = 2$ невозможно. Действительно, $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right| \leqslant \sqrt{2} < 2$.

592. $\sin x + \cos x + \frac{1}{2}(2\sin x \cos x + 1 - 1) = 1$, $\sin x + \cos x + \frac{1}{2}[(\sin x + \cos x)^2 - 1] = 1$. Положив $\sin x + \cos x = y$ и сделав преобразования, придем к уравнению: $y^2 + 2y - 3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. Второй корень отбрасываем, так как $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ (см. решение задачи 591).

Итак, $\cos x + \sin x = 1$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$; $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{(4k+1)\pi}{2}$.

593. $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x;$

$$\frac{2+20\cos^2 2x+10\cos^4 2x}{32}=\frac{29}{16}\cos^4 2x.$$

$$24\cos^4 2x-10\cos^2 2x-1=0,\quad \cos^2 2x=\frac{5+7}{24}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x=\frac{1}{2},\quad \cos 4x=0,\quad 4x=\frac{2k+1}{2}\pi,\quad x=\frac{2k+1}{8}\pi.$$

594. Преобразуем левую часть уравнения:

$\cos^2 x\cos 2x+\cos 4x+\cos 3x\cos x+2\cos^4 x=\cos^2 x\cos 2x+\cos 4x+$
$+\cos 3x\cos x+\cos^2 x(1+\cos 2x)=\cos x(2\cos x\cos 2x+\cos 3x+\cos x)+$
$+\cos 4x=\cos x(\cos 3x+\cos x+\cos 3x+\cos x)+\cos 4x=$
$=\cos x(2\cos 3x+2\cos x)+\cos 4x=2\cos x\cos 3x+2\cos^2 x+\cos 4x=$
$=\cos 4x+\cos 2x+1+\cos 2x+\cos 4x=1+2(\cos 2x+\cos 4x)=$
$=1+4\cos 3x\cos x.$

Теперь данное уравнение запишется так:

$$1+4\cos 3x\cos x=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Умножим обе части уравнения на $\sin x$. Получим:

$$\sin x+4\sin x\cos x\cos 3x=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad \sin x+2\sin 2x\cos 3x=$$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},\quad \sin x+\sin 5x-\sin x=\cos\frac{x}{2},$$

$$\sin 5x=\cos\frac{x}{2},\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=\cos\frac{x}{2},\quad \pm\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-5x+2k\pi;$$

$$x_1=\frac{4k+1}{11}\pi,\quad x_2=\frac{4k+1}{9}\pi.$$

Но, умножая уравнение на $\sin x$, мы могли ввести посторонние корни, которые, являясь корнями уравнения $\sin x=0$, имеют вид $x=n\pi$. Из формулы для x_1 и x_2 видно, что n не может быть четным, т. е. эти формулы не могут дать чисел вида $2m\pi$. Таким образом, посторонние корни, если они есть, имеют вид $(2m+1)\pi$. Приравняв значение $(2m+1)\pi$ сперва к x_1, а потом к x_2, найдем

$k = \frac{11m+5}{2}$ и $k = \frac{9m+4}{2}$. Следовательно, в формуле для x_1 $k \neq \frac{11m+5}{2}$, а в формуле для x_2 $k \neq \frac{9m+4}{2}$, причем в первом случае m нечетное, а во втором — четное.

595. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(60^\circ - x) \operatorname{ctg}(30^\circ - x) = \operatorname{tg} x \cdot \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\operatorname{tg} x + (1 - \operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg}^2 x) - 2\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} 3x.$$

Теперь уравнение запишется так: $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$. Решаем его: $5x = k\pi + 3x$, $2x = k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$. Но при $k = 2m + 1$ обе части уравнения не имеют смысла. Следовательно, нужно считать $k = 2m$ и $x = m\pi$.

596. $\cos x + \sin x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x}$,

$$\cos x + \sin x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2}, \quad \cos x + \sin x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x},$$

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0.$$

а) $\cos x + \sin x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$; $x_1 = k\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4k-1}{4}\pi$;

б) $\cos x - \sin x = 1$, $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\pi}{4} + x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4},$$

$$x_2 = 2k\pi, \quad x_3 = \frac{4k-1}{2}\pi.$$

597. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$, $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg} 3x$,

$$\operatorname{tg} 3x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg} 3x,$$

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 0.$$

а) $\operatorname{tg} x = 0, \quad x_1 = k\pi;$

б) $\operatorname{tg} 2x = 0, \quad x_2 = \frac{k\pi}{2};$

в) $\operatorname{tg} 3x = 0, \quad x_3 = \frac{k\pi}{3}.$

Но при $k = 3n \quad x_3 = n\pi = x_1$. Кроме того, при $k = 2n$ получим для x_2 то же значение, что и для x_3 при $k = 3n$. Если же учесть, что $x = \frac{2n-1}{2}\pi$ не может быть корнем уравнения, то все решения содержатся в формуле $x = \frac{k\pi}{3}$.

598. $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}(\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x},$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x,$$

$$(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0, \quad (\cos x + \sin x)(\cos 2x - 1) = 0.$$

а) $\cos x + \sin x = 0, \ \operatorname{tg} x = -1; \ x_1 = k\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4k-1}{4}\pi;$

б) $\cos 2x - 1 = 0, \ \cos 2x = 1; \ 2x = 2k\pi, \ x_2 = k\pi.$

599. Преобразуем левую часть уравнения:

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x) + (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x) = \frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} +$$

$$+ \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} = \frac{\sin 5x(\cos 2x \cos 3x + \cos x \cos 4x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} =$$

$$= \frac{\sin 5x[\cos 2x(4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos x \cos 4x]}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} =$$

$$= \frac{\sin 5x[\cos 2x(4\cos^2 x - 3) + \cos 4x]}{\cos 2x \cos 3x \cos 4x} = \frac{\sin 5x(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1)}{\cos 2x \cos 3x \cos 4x}.$$

Приравняв это выражение нулю и освободив полученное уравнение от знаменателя, придем к следующему уравнению, равносильному данному:

$$\sin 5x(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1) = 0.$$

Решаем его:

а) $\sin 5x = 0, \ 5x = k\pi, \ x_1 = \frac{k\pi}{5};$

б) $4\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0; \quad \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8},$

$$2x = 2k\pi \pm \arccos\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}, \quad x_2 = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}.$$

600. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin x\left(\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)=\sin x\cdot\frac{\sin x\sin\frac{x}{2}+\cos x\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\sin x\cdot\frac{\cos\left(x-\frac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\sin x\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$$

Следовательно, данное уравнение эквивалентно такому: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x$. Прибавим к обеим частям $-\operatorname{tg} x$, получим уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$, которое может быть и не эквивалентно данному, но является следствием его. Из последнего уравнения найдем $x = \frac{2k+1}{2}\pi$. Однако при таких значениях x обе части данного уравнения теряют смысл. Итак, уравнение не имеет решения.

601. $\frac{1}{\cos\sqrt{x}}+\frac{1}{\sin\sqrt{x}}=2\sqrt{2}$, $\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}=$

$$=2\sqrt{2}\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x},\quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{x}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\sin 2\sqrt{2}x,\quad \sin 2\sqrt{x}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{x}\right)$$

а) $2\sqrt{x}=2k\pi+\frac{\pi}{4}+\sqrt{x}$, $\sqrt{x_1}=\frac{8k+1}{4}\pi$.

б) $2\sqrt{x}=(2k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{x}\right)$, $\sqrt{x_2}=\frac{8k+3}{12}\pi$.

Но при $k=3n$ $\sqrt{x_2}=\frac{8n+1}{4}\pi=\sqrt{x_1}$.

Поэтому все решения содержатся в формуле

$$x=\frac{(8k+3)^2}{144}\pi^2,$$

причем k принимает лишь неотрицательные значения, т. е. $0, +1, +2, \ldots$

602. $\operatorname{tg}(x^2-x)=\operatorname{tg} 6$, $x^2-x=6+k\pi$, $x^2-x-(6+k\pi)=0$, $x=\frac{1\pm\sqrt{25+4k\pi}}{2}$. Здесь $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и x может быть мнимым, так как x^2-x остается вещественным при найденных значениях x.

603. Уравнение $|\sin x^2| = 1$ равносильно следующим двум: $\sin x^2 = 1$ и $\sin x^2 = -1$ или одному $\sin^2 x^2 = 1$. Из последнего находим:

$$\frac{1-\cos 2x^2}{2} = 1, \quad \cos 2x^2 = -1, \quad 2x^2 = (2k+1)\pi,$$

$$x^2 = \frac{2k+1}{2}\pi, \quad x = \pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

604. $|x| = \frac{4k+1}{2}\pi$ или $x = \pm\frac{4k+1}{2}\pi$, где $k = 0, +1, +2, \ldots$

605. $x^2 = 2k\pi$, $x = \pm\sqrt{2k\pi}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$*

606. Так как $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2|x|$, то уравнение можно переписать так:

$$\operatorname{tg}^2|x| = \frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}.$$

Решаем его:

$$\frac{1-\cos^2|x|}{1-\sin^2|x|} = \frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}, \quad 1-\cos^2|x| = (1-\cos|x|)(1+\sin|x|),$$

$$(1-\cos|x|)(\cos|x| - \sin|x|) = 0.$$

а) $1-\cos|x| = 0$, $\cos|x| = 1$, $|x| = 2k\pi$, $k = 0, +1, +2, \ldots$ Отсюда $\pm x = 2k\pi$, $x = \pm 2k\pi$ или $x_1 = 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

б) $\cos|x| - \sin|x| = 0$, $\operatorname{tg}|x| = 1$, $|x| = k\pi + \frac{\pi}{4}$, где $k = 0, +1, +2, \ldots$ Отсюда $\pm x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ или $x_2 = \frac{4k+1}{4}\pi$ и $x_3 = \frac{-4k-1}{4}\pi$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$

607. Уравнение не имеет корней. Действительно, так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то произведение двух синусов может равняться единице только в одном из следующих случаев: а) $\sin 2x = 1$, $\sin 6x = 1$; б) $\sin 2x = -1$, $\sin 6x = -1$. Рассмотрим первый случай. Будем иметь $x = \frac{4k+1}{4}\pi$ и $x = \frac{4l+1}{12}\pi$. Сравнивая найденные значения x, получим $\frac{4k+1}{4}\pi = \frac{4l+1}{12}\pi$, $3(4k+1) = 4l+1$, $12k+3 = 4l+1$, $12k = 4l-2$, $6k = 2l-1$. Но четное число не может равняться нечетному, и, следовательно, первый случай невозможен. Так же можно показать, что и второй случай невозможен.

---

* Здесь, как и в задаче 602, x может быть комплексным, лишь бы x^2 был вещественным.

Докажем это же по-другому. Сделаем следующие преобразования:

$$1 - \sin 2x \sin 6x = 0, \quad 1 - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = 0,$$

$$2 - \cos 4x + \cos 8x = 0, \quad 1 - \cos 4x + 1 + \cos 8x = 0,$$

$$2\sin^2 2x + 2\cos^2 4x = 0.$$

Последнее возможно в том и только в том случае, когда $\sin 2x = 0$ и $\cos 4x = 0$ совместно. Из полученных уравнений находим, что $x = \frac{k\pi}{2}$ и $x = \frac{2l+1}{8}\pi$. Отсюда: $\frac{k\pi}{2} = \frac{2l+1}{8}\pi$; $4k = 2l + 1$, что невозможно.

608. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}\sqrt{2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$,

$\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\sin x \cos x = 1$, $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin x \cos x = 1$,

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin 2x = 1$. Последнее возможно тогда и только тогда, когда а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin 2x = 1$ или б) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin 2x = -1$. В первом случае получим: $\frac{\pi}{4} + x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $2x = 2n\pi = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi$. Так как должно быть $x_1 = x_2$, то решение будет $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Во втором случае получим: $\frac{\pi}{4} + x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{8k-3}{4}\pi$ и $2x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \frac{4n-1}{4}\pi$. Но $\frac{4n-1}{4}\pi \neq \frac{8k-3}{4}\pi$, потому что в противном случае было бы $4n - 1 = 8k - 3$ или $2n = 4k - 1$, что невозможно. Следовательно, второй случай отпадает, и все решения данного уравнения содержатся в формуле $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

609. $\sin 3x + \sin 2x - m\sin x = 0$, $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin 2x - m\sin x = 0$, $\sin x(2\cos^2 x + \cos 2x + 2\cos x - m) = 0$, $\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - m - 1) = 0$ Отсюда: а) $\sin x = 0$, $x = k\pi$; б) $4\cos^2 x + 2\cos x - m - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{4m+5}}{4}$. Для ве-

ществености $\cos x$ нужно, чтобы было $4m+5\geqslant 0$, т. е. $m\geqslant -\frac{5}{4}$. Следовательно, при $m<-\frac{5}{4}$ уравнение $4\cos^2 x+2\cos x-m-1=0$ не имеет решения. Если $m\geqslant -\frac{5}{4}$, то еще нужно, чтобы при этом значении m было бы $|\cos x|\leqslant 1$, т. е. чтобы выполнялись неравенства:

$$\alpha)\ \left|\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}\right|\leqslant 1;\quad \beta)\ \left|\frac{-1-\sqrt{4m+5}}{4}\right|\leqslant 1.$$

Рассмотрим случай α). Должно быть: $|-1+\sqrt{4m+5}|\leqslant 4$, или $-4\leqslant -1+\sqrt{4m+5}\leqslant 4$, или $-3\leqslant \sqrt{4m+5}\leqslant 5$. Но левое неравенство всегда справедливо, а для того, чтобы выполнялось правое, нужно, чтобы $4m+5\leqslant 25$, т. е. $m\leqslant 5$. Если же учесть неравенство $m\geqslant -\frac{5}{4}$, то в рассматриваемом случае должно быть $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 5$.

Рассмотрим случай β). Должно быть: $|-1-\sqrt{4m+5}|\leqslant 4$ или $-4\leqslant -1-\sqrt{4m+5}\leqslant 4$, или $m\leqslant 1$, а с учетом $m\geqslant -\frac{5}{4}$, ранее найденного, получим $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$.

Итак, уравнение имеет следующие решения:

1) $x=k\pi$, если $m<-\frac{5}{4}$;

2) $x_1=k\pi$; $x_2=2k\pi\pm\arccos\frac{-1\pm\sqrt{4m+5}}{4}$,

если $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$;

3) $x_1=k\pi$; $x_2=2k\pi\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}$, если $1<m\leqslant 5$;

4) $x=k\pi$, если $m>5$.

610. $\frac{5}{3}\pi\cos\pi x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$, $\cos\pi x=\frac{3}{5}k+\frac{(-1)^k}{10}$. Так как $|\cos\pi x|\leqslant 1$, то из всех $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ можно взять лишь $k=-1$, $k=0$, $k=1$, все же прочие дадут для $|\cos\pi x|$ значение >1, что невозможно. При $k=-1$ получим: $\cos\pi x=-\frac{3}{5}-\frac{1}{10}=-\frac{7}{10}$, $\pi x=2n\pi\pm\arccos\left(-\frac{7}{10}\right)$, $x_1=2n\pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{10}\right)$; при $k=0$ будем иметь: $\cos\pi x=\frac{1}{10}$, $\pi x=$

$= 2n\pi \pm \arccos\frac{1}{10}$, $x_2 = 2n \pm \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10}$; при $k = 1$ получим: $\cos \pi x = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$, $\pi x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $x_3 = 2n \pm \frac{1}{3}$.

611. Уравнение можно записать так: $\sin(\pi \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \right.$ $\left. - \pi \sin x\right)$. Пользуясь условием равенства синусов, получим:

а) $\pi \cos x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \pi \sin x$ или $\sin x + \cos x = \frac{4k+1}{2}$;

б) $\pi \cos x = (2k+1)\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right)$ или $\cos x - \sin x = \frac{4k+1}{2}$.

Решаем первое уравнение: $\sin x + \cos x = \frac{4k+1}{2}$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \right.$ $\left. - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4k+1}{2}$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$ Очевидно, чтобы $\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$ было по абсолютной величине меньше единицы, из всех чисел 0, ± 1, ± 2, ... для k нужно взять только нуль. Поэтому $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x_1 = 2n\pi \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}$. Решаем второе уравнение: $\cos x - \sin x = \frac{4k+1}{2}$, $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4k+1}{2}$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$. Подобно предыдущему случаю и здесь k может быть равно только нулю. Поэтому $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x_2 = 2n\pi \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$ или, объединяя с x_1, получим $x = 2n\pi \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} \pm \frac{\pi}{4}$.

612. Перепишем уравнение так: $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right)$. Пользуясь условием равенства тангенсов, получим:

$$\pi \operatorname{tg} x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x \text{ или } \operatorname{tg} x = k + \frac{1}{2} - \operatorname{ctg} x. \quad (*)$$

Следует иметь в виду, что те корни уравнения (*), которые дадут тангенсу значения вида $\frac{2m+1}{2}$ или котангенсу значения вида m (m — целое), если они вообще существуют, не будут являться корнями данного, потому что при $\operatorname{tg} x = \frac{2m+1}{2}$ или $\operatorname{ctg} x = m$ теряет смысл левая или правая часть данного уравнения. Такие корни уравнения (*) при определении корней данного должны быть отброшены.

Уравнение (*) эквивалентно следующему: $\operatorname{tg} x = k + \frac{1}{2} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ или $\operatorname{tg}^2 x - \left(k + \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x + 1 = 0$. Решая последнее, найдем $\operatorname{tg} x = \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4}$. Для вещественности $\operatorname{tg} x$ должно быть: $(2k+1)^2 \geqslant 16$, $|2k+1| \geqslant 4$. Следовательно, k не может быть равно $0, \pm 1, -2$. Кроме того, должны быть исключены те значения k, которые дают $\operatorname{tg} x = \frac{2m+1}{2}$. Для того чтобы $\operatorname{tg} x = \frac{2m+1}{2}$, необходимо, чтобы $(2k+1)^2 - 16$ было квадратом нечетного числа, т. е. чтобы $(2k+1)^2 - 16 = (2l+1)^2$. Отсюда получаем: $(2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 16$, $(2k+1+2l+1)(2k-2l) = 16$, $(k+l+1)(k-l) = 4$ или $uv = 4$, где положено $u = k+l+1$, $v = k-l$. Таким образом, нужно решить в целых числах уравнение $uv = 4$, причем u и v — числа различной четности, потому что $u + v = 2k + 1$. Таких решений будет четыре: $u_1 = 1$, $v_1 = 4$; $u_2 = 4$, $v_2 = 1$; $u_3 = -1$, $v_3 = -4$, $u_4 = -4$, $v_4 = -1$. Первое и второе решения дают $2k + 1 = u + v = 5$, а последние $2k + 1 = -5$. В первом случае $k = 2$, а во втором $k = -3$. Но если $k = 2$, то $\operatorname{tg} x = \frac{5 \pm 3}{4}$, причем только $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ должно быть исключено, так как левая часть данного уравнения в этом случае не определена. Второе же ($\operatorname{tg} x = 2$) приводит к решению $x = n\pi + \operatorname{arc tg} 2$. Если $k = -3$, то $\operatorname{tg} x = \frac{-5 \pm 3}{4}$, причем только $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ должно быть отброшено, а $\operatorname{tg} x = -2$ приводит к решению $x = n\pi - \operatorname{arc tg} 2$. Итак, данное уравнение имеет следующие решения:

$$x_1 = n\pi \pm \operatorname{arc tg} 2, \quad x_2 = n\pi + \operatorname{arc tg} \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4}; \quad k = +3, \pm 4, \pm 5, \ldots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

613. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2 \cdot 2^{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$, $\cos 2 \cdot 2^{\sqrt{-x}} = 0$, $2 \cdot 2^{\sqrt{-x}} =$

$$= \frac{2k+1}{2}\pi, \quad 2^{\sqrt{-x}} = \frac{2k+1}{4}\pi, \sqrt{-x} = \log_2 \frac{2k+1}{4}\pi,$$

$$\sqrt{-x} = \log_2 (2k+1)\pi - 2,$$

$x = -[\log_2 (2k+1)\pi - 2]^2$. Так как $\sqrt{-x}$ — арифметический, то $2^{\sqrt{-x}} > 1$, т. е. $\frac{2k+1}{4}\pi > 1$. Это значит, что $k = 1, 2, 3, \ldots$, а быть отрицательным или нулем k не может.

614. $\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} - 2 = 0,$

$$(\log_{\cos x} \sin x)^2 - 2\log_{\cos x} \sin x + 1 = 0,$$

$$(\log_{\cos x} \sin x - 1)^2 = 0, \quad \log_{\cos x} \sin x = 1, \quad \cos x = \sin x,$$

$\operatorname{tg} x = 1$; $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{8k+1}{4}\pi$. Здесь нельзя было бы написать $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, потому что $\sin x$ и $\cos x$, являясь основаниями логарифмов, должны быть положительными.

615. $x^2 + 2x \sin(xy) + \sin^2(xy) + \cos^2(xy) = 0$, $[x + \sin(xy)]^2 + \cos^2(xy) = 0$. Следовательно, должно быть $\cos^2(xy) = 0$, $x + \sin(xy) = 0$. Из первого уравнения находим $xy = k\pi + \frac{\pi}{2}$, а тогда из второго получим $x = -\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Если $k = 2n+1$, то $x_1 = 1$, $y_1 = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$. Если $k = 2n$, то $x_2 = -1$, $y_2 = 2n\pi - \frac{\pi}{2} = 2m\pi + \frac{3}{2}\pi$; $(-n = m+1)$.

616—627. Указание. При решении уравнений, в которых неизвестные находятся под знаком обратной тригонометрической функции, часто приходится находить синусы (или косинусы, тангенсы и т. д.) обеих частей равенства. При этом следует иметь в виду, что получающиеся уравнения, вообще говоря, не будут равносильны исходным. Например, $A = B$ и $\sin A = \sin B$, вообще говоря, не равносильны. То же следует сказать об уравнениях $A = B$ и $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$ и им аналогичных.

616. Не имеет решений, так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, а здесь $\arccos x = \frac{6{,}3}{2} = 3{,}15 > \pi$.

617. Имеем $\arcsin x = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. Отсюда $\sin(\arcsin x) =$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) \text{ или } x = \sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) -$$

$$-\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times$$

$$\times\frac{1}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}}}=\frac{3}{5}.$$ Проверку найденного значения x проще всего осуществить с помощью теоремы: если $\sin\alpha=\sin\beta$, причем α и β — главные значения арксинуса, то $\alpha=\beta$ (см указание к решению задач 538—569) В данном случае $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$, а $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\beta$. Так как $0<\arcsin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{2}$ и $0<\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}<\frac{\pi}{2}$, т. е $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, кроме того, доказано, что $\sin\alpha=\sin\beta$, то $\alpha=\beta$ или иначе $\arcsin\frac{3}{5}=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$.

618. Взяв косинус от обеих частей равенства и воспользовавшись формулами задачи 541, получим:

$$\cos(\arcsin x+\arcsin 2x)=\cos\frac{\pi}{3},$$

$$\cos(\arcsin x)\cos(\arcsin 2x)-\sin(\arcsin x)\sin(\arcsin 2x)=\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}-2x^2=\frac{1}{2},\quad\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}=2x^2+\frac{1}{2},$$

$$(1-x^2)(1-4x^2)=\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)^2,\quad 1-5x^2+4x^4=4x^4+2x^2+\frac{1}{4},$$

$$7x^2=\frac{3}{4};\quad x_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}},\quad x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Значение $x_2<0$ не удовлетворяет данному уравнению, так как в этом случае левая часть уравнения имеет отрицательную численную величину, а правая — положительную. Чтобы проверить первый корень $x_1>0$, положим $\arcsin x_1=\alpha$, а $\arcsin 2x_1=\beta$. Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha+\beta<\pi$ и угол $\frac{\pi}{3}$ тоже принадлежит промежутку $(0,\ \pi)$, то из равенства $\cos(\alpha+\beta)=\cos\frac{\pi}{3}$ следует равенство $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

Замечание. Здесь была использована теорема: если $\cos\alpha=$

$= \cos\beta$, причем α и β — главные значения арккосинуса, то $\alpha = \beta$ (см. указание к решению задач 538—569).

619. Возьмем косинус от обеих частей уравнения и, воспользовавшись формулами задачи 541, получим:

$\cos(2\arcsin x) = \cos(\arccos 2x)$, $\cos^2(\arcsin x) - \sin^2(\arcsin x) = 2x$,

$(1 - x^2) - x^2 = 2x$, $2x^2 + 2x - 1 = 0$; $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Второй корень посторонний ($|x_2| > 1$). Чтобы испытать корень $x_1 > 0$, обозначим $\arcsin x_1 = \alpha$, а $\arccos 2x_1 = \beta$. Так как $0 < 2\alpha < \pi$ и $0 < \beta < \pi$, то из равенства $\cos 2\alpha = \cos\beta$ следует равенство $2\alpha = \beta$ (см. замечание к задаче 618).

620. Взяв синус от левой и правой частей уравнения, получим: $\sin(2\arccos x) = \sin[\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})]$, $2\sin(\arccos x)\cos(\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $2x\sqrt{1-x^2} = 2x\sqrt{1-x^2}$. Полученное равенство есть тождество, однако это еще не значит, что любой x, для которого $|x| \leqslant 1$, удовлетворяет данному уравнению. Так как $\arccos x$ всегда неотрицательный, то, как видно из данного уравнения, $0 \leqslant \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Отсюда получаем $0 \leqslant 2\arccos x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ или $0 \leqslant \arccos x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Следовательно, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1$.

621. $\sin(\arcsin x) = \sin(2\arcsin x\sqrt{2})$, $x = 2\sin(\arcsin x\sqrt{2}) \times \cos(\arcsin x\sqrt{2})$, $x = 2x\sqrt{2}\sqrt{1-2x^2}$. Решив полученное иррациональное уравнение, найдем: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $x_3 = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Корень x_1, очевидно, удовлетворяет уравнению. Испытаем корень x_2. Имеем: $0 < \arcsin x_2 < \dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin x_2\sqrt{2} = \arcsin\dfrac{\sqrt{7}}{4}\cdot\sqrt{2} > \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, $2\arcsin x_2\sqrt{2} > \dfrac{\pi}{2}$. Итак, оказывается, что при $x = x_2$ численная величина левой части уравнения меньше $\dfrac{\pi}{2}$, а правой — больше $\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, x_2 — посторонний корень. Легко убедиться, что и x_3 посторонний. Данное уравнение имеет только один корень $x = 0$.

622. Запишем уравнение так: $\arccos x - \arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$. Но

$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ (см. задачу 539). Подставляя это значение $\arcsin x$ в предыдущее уравнение, получим:

$$\arccos x - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \frac{\pi}{6}, \quad 2\arccos x = \frac{2\pi}{3},$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{3}, \quad x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

623. $\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = x$, $x^2 = \sqrt{1-x^2}$, $x^4 + x^2 - 1 = 0$. Последнее уравнение имеет два вещественных корня: $x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Корень $x_2 < 0$ не удовлетворяет данному уравнению, потому что $\arccos x_2 > 0$, а $\operatorname{arctg} x_2 < 0$. Значение $x = x_1$ удовлетворяет уравнению, так как $0 < \arccos x_2 < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \operatorname{arctg} x_2 < \frac{\pi}{2}$.

624. Перенеся второй член из левой части уравнения в правую и взяв тангенс от обеих частей уравнения, получим

$$\frac{x - 1 + x + 1}{1 - (x-1)(x+1)} = \frac{3x - x}{1 + 3x \cdot x} \text{ или } 2x(4x^2 - 1) = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, и все они, как легко проверить, удовлетворяют данному уравнению.

625. Взяв синус от обеих частей уравнения и воспользовавшись формулами задачи 541, получим

$$\frac{2}{3\sqrt{x}}\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2} + \sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-x} = \frac{1}{3}$$

или

$$\frac{2}{3} + \sqrt{1-\frac{4}{9x}}\cdot\sqrt{1-x} = \frac{1}{3}.$$

Так как корни подразумеваются арифметические, то последнее уравнение противоречиво. Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

626. Возьмем косинус от обеих частей уравнения и воспользуемся формулами задачи 541. Получим:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}} - \sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2x}{1-x^2} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}{(1+x^2)^2} - \frac{4x\sqrt{x^2}\sqrt{(1-x^2)^2}}{(1+x^2)^2(1-x^2)} = -\frac{1}{2}. \quad (*)$$

Так как $0 \leqslant \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant \pi$ и $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2} < \frac{\pi}{2}$, то для того, чтобы левая часть данного уравнения была $\frac{3}{4}\pi > \pi$, должно быть $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} > \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2} > 0$. Отсюда $\frac{1-x^2}{1+x^2} < 0$, $\frac{2x}{1-x^2} > 0$ и, следовательно, $x^2 > 1$ и $x < 0$.

Возвращаемся теперь к уравнению (*). Входящие в него корни должны быть арифметическими, и поэтому $\sqrt{(1-x^2)^2} = x^2 - 1$, $\sqrt{x^2} = -x$. Теперь уравнение (*) можно записать так: $-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}$. Но это невозможно, так как левая часть равна -1, а правая $-\frac{1}{2}$. Следовательно, уравнение не имеет решений.

627. Взяв тангенс от обеих частей уравнения и сделав некоторые преобразования, получим

$$x = \frac{\frac{a}{b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a}{b}\cdot\frac{a-b}{a+b}} = \frac{a^2+b^2}{b^2+a^2} = 1.$$

Произведем испытание найденного значения x. Левая часть данного уравнения при $x = 1$ дает $\frac{\pi}{4}$. Выясним, даст ли правая часть $\frac{\pi}{4}$. Пользуясь условием равенства тангенсов, можем написать

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{a+b} = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Замечая, что $b \neq 0$ (иначе данное уравнение теряет смысл), перепишем последнее равенство так:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

или

$$\operatorname{arc\,tg}y+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-y}{1+y}=\frac{\pi}{4}+k\pi,\text{ где }y=\frac{a}{b}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}y<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}\frac{1-y}{1+y}<\frac{\pi}{2}$ и $-\pi<\operatorname{arc\,tg}y+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-y}{1+y}<\pi$, то k может равняться только 0 или -1. Итак, получаем, что $\operatorname{arc\,tg}y+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-y}{1+y}=\frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arc\,tg}y+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-y}{1+y}=-\frac{3}{4}\pi$. Если $1+y<0$, то, очевидно, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}y<0$, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}\frac{1-y}{1+y}<0$, $-\pi<\operatorname{arc\,tg}y+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-y}{1+y}<0$. Ясно, что в этом случае правая часть будет равна $-\frac{3}{4}\pi$ и, следовательно, $x=1$ не будет корнем уравнения. Если $1+y>0$, то $\operatorname{arc\,tg}y$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{1-y}{1+y}$ будут в промежутке $0\leqslant y\leqslant 1$ неотрицательны, и их сумма может быть только положительным числом, а в промежутках $-1<y<0$ и $1<y<+\infty$ они будут разных знаков, и их сумма будет находиться между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. В этом случае

$$\operatorname{arc\,tg}y+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-y}{1+y}=\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{a+b}=\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, при $\frac{a}{b}>-1$ уравнение имеет единственное решение $x=1$. В прочих случаях уравнение не имеет решений.

628. Взяв синус от обеих частей уравнения, получим:

$$\sin(\arcsin x)=\sin(\arcsin a+\arcsin b),$$

$$x=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}.$$

Испытаем это значение x, подставив его в данное уравнение. Это даст

$$\arcsin\left(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\right)=\arcsin a+\arcsin b.$$

Последнее равенство является тождеством, если $ab \leqslant 0$ или $a^2 + b^2 \leqslant 1$ (см. задачу 560). Конечно, кроме того, предполагается, что $|a| \leqslant 1$ и $|b| \leqslant 1$. При указанных ограничениях, налагаемых на a и b, найденное значение x будет единственным решением данного уравнения. Если a и b этим соотношениям не удовлетворяют, то уравнение не имеет решения.

629. Из второго уравнения находим произведение $\cos x \cos y$, используя первое уравнение. Получим:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{3}{4\cos x \cos y} = 3, \quad \cos x \cos y = \frac{1}{4}.$$

Поэтому данная система приводится к следующей равносильной: $\cos x \cos y = \frac{1}{4}$, $\sin x \sin y = \frac{3}{4}$. Складывая почленно полученные уравнения, а затем вычитая их и пользуясь формулами косинуса суммы и косинуса разности двух углов, придем к новой системе, равносильной данной: $\cos(x - y) = 1$, $\cos(x + y) = -\frac{1}{2}$. Отсюда: $x - y = 2m\pi$, $x + y = 2n\pi \pm \frac{2}{3}\pi$, $x = (n + m)\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $y = (n - m)\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

630. $\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}$, $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2} = \frac{3}{4}$,

$$\cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2}, \quad \cos(x + y)\cos(x - y) = \frac{1}{4},$$

$$\cos 75^\circ \cos(x - y) = \frac{1}{4}, \quad \cos(x - y) = \frac{1}{4\cos 75^\circ} = \frac{1}{4\sin 15^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 15^\circ}{4\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{2\sin 30^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{2 \cdot 0{,}5} = \cos 15^\circ.$$

Итак, $\cos(x - y) = \cos 15^\circ$; $x - y = 360^\circ n \pm 15^\circ$, $x + y = 75^\circ$;

$$x_1 = 180^\circ n + 45^\circ = (4n + 1)45^\circ, \quad y_1 = -180^\circ n + 30^\circ =$$

$$= (-6n + 1)30^\circ; \quad x_2 = 180^\circ n + 30^\circ = (6n + 1)30^\circ,$$

$$y_2 = -180^\circ n + 45^\circ = (-4n + 1)45^\circ.$$

631. Во втором уравнении выразим тангенсы через синусы и косинусы и затем подставим в него значение $\sin x$ из первого уравнения. Получим: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}\operatorname{tg} y$, $\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}\frac{\sin y}{\cos y}$, $\frac{\sqrt{2}\sin y}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}\sin y}{\cos y}$, $\sin y(\sqrt{2}\cos y - \sqrt{3}\cos x) = 0$; а) $\sin y = 0$, $y_1 = k\pi$. Подставляем в первое уравнение $\sin x = 0$, $x_1 = n\pi$. Итак, $x_1 = n\pi$, $y_1 = k\pi$. Следующую группу решений получим из уравнения б) $\sqrt{2}\cos y - \sqrt{3}\cos x = 0$. Решаем его: $\sqrt{2}\cos y =$

$= \sqrt{3}\cos x$, $\sqrt{2}\cos y = \pm\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 x}$, $\sqrt{2}\cos y = \pm\sqrt{3}\sqrt{1-2\sin^2 y}$. Возводим обе части уравнения в квадрат: $2\cos^2 y = 3(1-2\sin^2 y)$, $2\cos^2 y = 3(2\cos^2 y - 1)$, $\cos^2 y = \frac{3}{4}$, $\cos y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = m\pi \pm \frac{\pi}{6}$. Подставляем найденное значение $\cos y$ в первое уравнение системы. Получим: $\sin x = \pm\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = l\pi \pm \frac{\pi}{4}$. Так как мы возводили в квадрат обе части уравнения, то необходимо испытать значения x_2 и y_2. Подставляем во второе уравнение $\operatorname{tg}\left(l\pi \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(m\pi \pm \frac{\pi}{6}\right)$. Период тангенса есть π, поэтому можно написать: $\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$, $\pm 1 = \sqrt{3}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Итак, уравнение удовлетворяется, если брать одновременно верхние или одновременно нижние знаки в обеих частях последнего равенства. Подставляем в первое уравнение $\sin\left(l\pi \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(m\pi \pm \frac{\pi}{6}\right)$. Если брать одновременно оба верхних или оба нижних знака, то последнее равенство можно переписать так: $\cos l\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\cos m\pi \cdot \frac{1}{2}$, $\cos l\pi = \cos m\pi$, $(-1)^l = (-1)^m$. Отсюда заключаем, что l и m нужно брать одновременно четные или нечетные. Поэтому система имеет следующие решения:

$$x_1 = n\pi,\ y_1 = k\pi;\ x_2 = l\pi + \frac{\pi}{4},\ y_2 = m\pi + \frac{\pi}{6};\ x_3 = l\pi - \frac{\pi}{4},$$

$$y_3 = m\pi - \frac{\pi}{6};\ m,\ n,\ k,\ l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

причем l и m нужно брать одновременно четные или нечетные.

IX.

НЕРАВЕНСТВА

632. После приведения к общему знаменателю получим:

$$\frac{(mx+n)(a-b)-(px+q)(a+b)}{a^2-b^2} < \frac{(mx-n)(a+b)+(px-q)(a-b)}{a^2-b^2}.$$

Если $a^2 - b^2 > 0$, то неравенство после преобразований принимает вид $(mb + pa)\,x > na - qb$; если $a^2 - b^2 < 0$, то $(mb + pa)\,x < na - qb$. Отсюда получим $x > \dfrac{na - qb}{mb + pa}$, если $(a^2 - b^2)(mb + pa) > 0$; $x < \dfrac{na - qb}{mb + pa}$, если $(a^2 - b^2)(mb + pa) < 0$.

633. $\dfrac{4(8x + 3) - (7x - 5)}{8x + 3} < 0$, $\dfrac{25x + 17}{8x + 3} < 0$.

а) $25x + 17 > 0$, $8x + 3 < 0$; $x > -\dfrac{17}{25}$, $x < -\dfrac{3}{8}$; $-\dfrac{17}{25} < x < -\dfrac{3}{8}$; б) $25x + 17 < 0$, $8x + 3 > 0$, $x < -\dfrac{17}{25}$, $x > -\dfrac{3}{8}$. Это невозможно.

634. $\dfrac{2x + 2 - 6 + x - 2}{x - 2} > 0$, $\dfrac{3x - 6}{x - 2} > 0$, $3 > 0$.

Неравенство справедливо при всяком $x \neq 2$.

635. $\dfrac{2 - x}{2x} < 0$. а) $2 - x < 0$, $2x > 0$. Отсюда $x > 2$. б) $2 - x > 0$, $2x < 0$. Отсюда $x < 0$.

636. Неравенство приводится к такому: $(x - 1)(x + 3)^2 > 0$. Последнее же равносильно неравенству $x - 1 > 0$, откуда $x > 1$.

637. $2x^3 - x - 1 > 0$, $(2x^3 - 2x^2) + (2x^2 - 2x) + (x - 1) > 0$, $(x - 1)(2x^2 + 2x + 1) > 0$. Но $2x^2 + 2x + 1 = \dfrac{1}{2}[(2x + 1)^2 + 1] > 0$. Поэтому неравенство равносильно такому: $x - 1 > 0$. Следовательно, $x > 1$.

638. Неравенство эквивалентно такому: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0$. Корни многочлена, находящегося в левой части неравенства, будут 1, 2, 3, 4. Расположим их в порядке возрастания. Построим интервалы: * $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, +\infty)$. Крайние

---

* Если a и b — произвольные вещественные числа и $a < b$, то по определению:

1) интервалом (a, b) называется множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$;

2) сегментом $[a, b]$ называется множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$;

3) полусегментом $[a, b)$ называется множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$;

4) полуинтервалом $(a, b]$ называется множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$.

Интервал, сегмент, полусегмент, полуинтервал объединяются общим термином промежуток. При этом нередко к слову промежуток добавляют в первом случае открытый, во втором — замкнутый, в третьем и четвертом — полуоткрытый.

интервалы есть условная запись того факта, что в первом случае $x < 1$, а в последнем $x > 4$. При переходе x из одного интервала в другой, смежный с ним, многочлен меняет свой знак, так как границей смежных интервалов служит корень многочлена. Поэтому для всех x какого-либо из написанных интервалов имеет место постоянство знака численной величины многочлена и чередование знака с + на — или с — на + при переходе из интервала в интервал. Следовательно, раз в первом из них многочлен положительный, что очевидно, то он будет положительным также в третьем и пятом интервалах. Итак, должно быть $x < 1$, или $2 < x < 3$, или $x > 4$.

639. $(x^4 - x^3) - (5x^3 - 5x^2) + (6x^2 - 6x) < 0$, $x(x-1)(x^2 - 5x + 6) < 0$, $x(x-1)(x-2)(x-3) < 0$. Записав теперь интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$ и поступая, как в задаче 638, получим решения: $0 < x < 1$ и $2 < x < 3$.

640. Данное неравенство равносильно следующему:

$$-2(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3) > 0.$$

Далее, поступая, как в задаче 638, найдем решения: $-4 < x < -3$, $-2 < x < -1$ и $\frac{1}{2} < x < 3$.

641. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x-1)(x-5)}{(x+3)(x-3)} > 0,$$

а последнее — неравенству $(x+3)(x-1)(x-3)(x-5) > 0$. Поступая теперь, как в задаче 638, найдем решения: $x < -3$, $1 < x < 3$ и $x > 5$.

642. Пользуясь теоремой Безу, напишем остатки от деления данного многочлена на $x - 1$ и на $x + 3$ и приравняем остатки нулю. Получим: $a + b - 5 = 0$; $-3a + b - 9 = 0$. Из этой системы найдем $a = -1$, $b = 6$. Разделив теперь многочлен $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ на $(x-1)(x+3)$, получим в частном $x^2 - x - 2$ и, следовательно, можем написать $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1) \times (x+3)(x^2 - x - 2) = (x-1)(x+3)(x-2)(x+1) > 0$. Рассматривая интервалы: $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$, убеждаемся, что данное неравенство справедливо, когда x находится в первом, или третьем, или пятом интервалах, т. е. должно быть $x < -3$, или $-1 < x < 1$, или $x > 2$.

643. Для этого должны одновременно выполняться неравенства: $b^2 - 4ac \geqslant 0$, $\frac{b}{a} < 0$, $\frac{c}{a} > 0$, где a, b, c — коэффициенты данного уравнения. Эти неравенства равносильны следующим: $-2k +$

$+3 \geqslant 0$, $k(k-1) > 0$, $(k-1)(k+3) > 0$. Отсюда получим: а) $k \leqslant \frac{3}{2}$, $k > 0$, $k > 1$, $k > -3$, что дает $1 < k \leqslant \frac{3}{2}$; б) $k \leqslant \frac{3}{2}$, $k < 0$, $k < 1$, $k < -3$, что дает $k < -3$.

644. Составим разность трехчленов. Получим $(k-4)x^2 + (2k-3)x + k + 4$. Этот трехчлен должен быть при всех x положительным. Но квадратный трехчлен имеет знакопостоянную величину при всяком x, если его корни комплексные, т. е. дискриминант отрицательный. При этом знак совпадает со знаком коэффициента при x^2. Следовательно, должны совместно выполняться неравенства:

$$(2k-3)^2 - 4(k-4)(k+4) < 0 \text{ и } k - 4 > 0.$$

Из второго получаем $k > 4$, а из первого $-12k + 9 + 64 < 0$, $12k > 73$, $k > \frac{73}{12}$. Отсюда видим, что должно быть $k > \frac{73}{12}$.

645. Так как дискриминант трехчлена $4x^2 + 6x + 3$ отрицательный, то он имеет знак коэффициента при x^2, т. е. знак плюс. Поэтому неравенство можно переписать так: $2kx^2 + 2\lambda x + \lambda > 4kx^2 + 6kx + 3k$ или $2kx^2 + 2(3k - \lambda)x + 3k - \lambda < 0$. Но трехчлен, находящийся в левой части, не может быть отрицательным при всех x, потому что коэффициент $2k$ при x^2 — положительный (см. решение задачи 644). Таким образом, данное неравенство не имеет решений.

646. Данное неравенство будет удовлетворяться при всяком x, если дискриминант данного трехчлена отрицательный, т. е. если $(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$. Последнее легко преобразовать к виду $-16p(p-a)(p-b)(p-c) < 0$, где p — полупериметр. А это неравенство очевидное.

647. Для доказательства рассмотрим неравенство

$$(a_1 + b_1x)^2 + (a_2 + b_2x)^2 + (a_3 + b_3x)^2 \geqslant 0,$$

справедливое при любых x. Дискриминант квадратного трехчлена, находящегося в левой части этого неравенства, должен быть $\leqslant 0$. Отсюда и вытекает неравенство Буняковского.

648. Освободив уравнение от дробей, получим уравнение

$$(a-2)x^4 - (a-1)(p^2 + q^2)x^2 + ap^2q^2 = 0.$$

Чтобы все корни биквадратного уравнения $kx^4 + lx^2 + m = 0$ были вещественные, необходимо и достаточно, чтобы квадраты x_1^2 и x_2^2 корней этого уравнения были неотрицательны или чтобы совместно выполнялись неравенства $l^2 - 4km \geqslant 0$, $\frac{m}{k} \geqslant 0$, $\frac{l}{k} \leqslant 0$.

Так как последние два можно записать в виде $mk \geqslant 0$ и $lk < 0$, то для уравнения задачи это будет выглядеть так:

$$(a-1)^2(p^2+q^2)^2-4(a-2)ap^2q^2\geqslant 0,\ (a-2)ap^2q^2\geqslant 0,$$
$$(a-2)(a-1)(p^2+q^2)\geqslant 0.$$

Но первое неравенство выполняется тождественно. На самом деле, учитывая, что

$$(a-2)a=[(a-1)-1][(a-1)+1]=(a-1)^2-1,$$

это неравенство можно записать в виде $(a-1)^2(p^2-q^2)^2+4p^2q^2>0$. Что касается двух других, то так как $p^2q^2>0$ и $p^2+q^2>0$, то их можно записать так: $(a-2)a\geqslant 0$, $(a-2)\times(a-1)\geqslant 0$. Отсюда: а) $a-2\geqslant 0$, $a>0$, $a-1\geqslant 0$, что дает $a\geqslant 2$; б) $a-2<0$, $a<0$, $a-1<0$, что дает $a<0$. Итак, $a\geqslant 2$ или $a<0$.

649. Неравенство равносильно такому: $\frac{3x-1}{2-x}>1$, или $\frac{4x-3}{2-x}>0$, или $(4x-3)(x-2)<0$. Отсюда получим $\frac{3}{4}<x<2$.

650. Должно быть $3-x\geqslant 0$ или $x\leqslant 3$. Если $x<2$, т. е. $x-2<0$, то неравенство будет выполняться, потому что $\sqrt{3-x}$ арифметический. Если же $2\leqslant x<3$, то возведение в квадрат неравенства даст: $3-x>x^2-4x+4$, $x^2-3x+1<0$, $\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)<0$. Это значит, что должно быть $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, а если еще учесть, что $2\leqslant x<3$, причем $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<2$, а $\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3$, то получим $2\leqslant x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Соединяя с ранее полученным результатом ($x<2$), видим, что решения составляют интервал $\left(-\infty,\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

651. Должно быть $x-4\geqslant 0$ и $3x-5\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 4$. Предполагая это выполненным, возведем неравенство в квадрат Это даст $3x-5>x-4$ или $x>\frac{1}{2}$. Сопоставляя с $x\geqslant 4$, получим окончательно $x\geqslant 4$.

652. Прежде всего должны выполняться совместно неравенства: $x+6\geqslant 0$, $x+1\geqslant 0$, $2x-5\geqslant 0$, что будет иметь место, если $x\geqslant\frac{5}{2}$. Предполагая это выполненным, возведем обе части неравенства в квадрат. Тогда после преобразований получим $\sqrt{(x+1)(2x-5)}<5-x$. Следовательно, $x<5$, так как левая часть положительна. Предполагая и это выполненным, снова возведем обе части неравенства в квадрат. Тогда придем к неравенству

$x^2 + 7x - 30 < 0$ или $(x + 10)(x - 3) < 0$, которое справедливо при $-10 < x < 3$. Сопоставляя с ранее полученными неравенствами $\frac{5}{2} \leqslant x < 5$, видим, что для их совместности нужно, чтобы $\frac{5}{2} \leqslant x < 3$.

653. Так как должно быть $(x + 5)(3x + 4) \geqslant 0$, то отсюда заключаем, что должно иметь место $x \leqslant -5$ или $x \geqslant -\frac{4}{3}$. Если, кроме того, $x < 1$, то левая часть будет отрицательной и, следовательно, неравенство будет выполняться, если $x \leqslant -5$ или $-\frac{4}{3} \leqslant x < 1$. Если же $x \geqslant 1$, то, возведя обе части данного неравенства в квадрат, получим после упрощений $13x^2 - 51x - 4 < 0$ или $13\left(x + \frac{1}{13}\right)(x - 4) < 0$. Последнее будет справедливо при $-\frac{1}{13} < x < 4$. Сопоставляя полученные ранее для $x < 1$ неравенства $x \leqslant -5$ и $-\frac{4}{3} \leqslant x < 1$ с полученными теперь для $x \geqslant 1$, $1 \leqslant x < 4$, видим, что окончательно решения можно записать так: 1) $x \leqslant -5$; 2) $-\frac{4}{3} \leqslant x < 4$.

654. Система приводится к виду: $3y - 2x < -1$, $2y - 3x > 0$. Из нее получим $y < \frac{2x - 1}{3}$ и $y > \frac{3}{2}x$. Следовательно, $\frac{3}{2}x < y < \frac{2x - 1}{3}$, а соответствующие этим неравенствам для y значения x определятся из неравенства $\frac{3}{2}x < \frac{2x - 1}{3}$, что даст $x < -\frac{2}{5}$. Итак, получим: $x < -\frac{2}{5}$, $\frac{3}{2}x < y < \frac{2x - 1}{3}$.

655. Решая каждое неравенство относительно y, получим $y > \frac{7 - 3x}{2}$ и $y > \frac{3 - 2x}{4}$. Эти неравенства одинакового смысла. Решение относительно x привело бы также к неравенствам одинакового смысла. Полученные неравенства показывают, что x может быть произвольным, а y должен быть выбран больше наибольшего из значений $\frac{7 - 3x}{2}$ и $\frac{3 - 2x}{4}$. Чтобы выяснить, какое из этих двух выражений больше, решим неравенство $\frac{3 - 2x}{4} \geqslant \frac{7 - 3x}{2}$, что даст $x \geqslant \frac{11}{4}$, а затем неравенство $\frac{7 - 3x}{2} \geqslant \frac{3 - 2x}{4}$, что даст $x \leqslant$

$\leqslant \frac{11}{4}$. Отсюда получаем: 1) $y > \frac{7-3x}{2}$, если $x \leqslant \frac{11}{4}$; 2) $y > \frac{3-2x}{4}$, если $x \geqslant \frac{11}{4}$.

656. Из первого и второго неравенств находим: $y > \frac{4-3x}{2}$, $y < \frac{x+5}{6}$. Следовательно, $\frac{4-3x}{2} < y < \frac{x+5}{6}$. Что касается x, то его найдем из неравенства $\frac{4-3x}{2} < \frac{x+5}{6}$, что даст $x > \frac{7}{10}$. Итак, окончательно: $x > \frac{7}{10}$, $\frac{4-3x}{2} < y < \frac{x+5}{6}$.

657. Находим y из уравнения и подставляем его значение в неравенство, которое решаем. Получим: $5x + 3 \cdot \frac{168-7x}{4} > 121$, $20x + 504 - 21x > 484$, $x < 20$. Таким образом, получаем решения в виде $x > 20$, $y = \frac{168-7x}{4}$.

Можно было бы найти x из уравнения и подставить его в неравенство. Тогда решения получили бы в таком виде: $y > 7$, $x = \frac{168-4y}{7}$.

658. Так как $x > y^2 \geqslant 0$, то система эквивалентна такой: $y > x^2$; $y < \sqrt{x}$. Отсюда $x^2 < y < \sqrt{x}$. Для этого требуется, чтобы x удовлетворял неравенству $x^2 < \sqrt{x}$, которое можно переписать в виде $x^4 < x$, или $x(x^3 - 1) < 0$, или $x(x-1) < 0$. Из последнего находим, что $0 < x < 1$. Следовательно, решения системы можно записать так: $0 < x < 1$, $x^2 < y < \sqrt{x}$.

659. Из уравнения находим y, подставляем его в оба неравенства и решаем совместно систему неравенств. Получим: $x^2 + \frac{(6-3x)^2}{4} > 4$, $x \cdot \frac{6-3x}{2} < 1$ или $13x^2 - 36x + 20 > 0$, $3x^2 - 6x + 2 > 0$ или $13\left(x - \frac{10}{13}\right)(x-2) > 0$, $3\left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \times \left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) > 0$. Отсюда а) $x < \frac{10}{13}$, $x < \frac{3-\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $x < \frac{3-\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{6-3x}{2}$. б) $x > 2$, $x > \frac{3+\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $x > 2$, $y = \frac{6-3x}{2}$.

660. а) Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$, и данное неравенство запишется так: $a < b$. Кроме того, $-b < 0$, а положительное число и нуль

больше отрицательного, и поэтому $-b<a$. Итак, если $a\geqslant 0$, то $-b<a<b$.

б) Если $a<0$, то $|a|=-a$, и из данного неравенства получим $-a<b$ или $-b<a$. Кроме того, $b>0$, а отрицательное число меньше положительного, поэтому $a<b$. Таким образом, и в этом случае $-b<a<b$.

661. Если $-b<a<b$, то $-b<a$ и $a<b$ или $a+b>0$ и $a-b<0$. Но тогда $(a+b)(a-b)<0$ или $a^2-b^2<0$. Отсюда $a^2<b^2$, $|a|<b$.

662. Пусть a и b — любые вещественные числа. Очевидно, $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$, $-|b|\leqslant b\leqslant|b|$. Складывая эти неравенства почленно, получим $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$. Но тогда $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ (см. задачу 661).

663. Замечая, что $a=(a-b)+b$, можем написать $|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$ (см. задачу 662). Отсюда $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

664. Данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$-3<\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}<3,$$

которая, если освободиться от положительного знаменателя, приводится к следующей:

$$2x^2+(3+k)x+2>0,\quad 4x^2-(k-3)x+4>0.$$

Чтобы эти неравенства выполнялись одновременно и для всех x, необходимо и достаточно, чтобы дискриминанты трехчленов, стоящих в левых частях неравенств, были отрицательны, т. е. чтобы

$$(3+k)^2-16=(k+7)(k-1)<0,$$
$$(k-3)^2-64=(k+5)(k-11)<0.$$

Для первого должно быть $-7<k<1$, а для второго $-5<k<11$. Общая часть интервалов $(-7, 1)$ и $(-5, 11)$ есть $(-5, 1)$. Поэтому доказываемая теорема имеет место только для тех значений k, которые удовлетворяют условию $-5<k<1$.

665. $\dfrac{a+b}{1+a+b}=\dfrac{a}{1+a+b}+\dfrac{b}{1+a+b}<\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$.

666. Так как $a\neq 0$, то данное неравенство можно записать так: $\dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^m}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^m}>\dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$. Но $0<\dfrac{b}{a}<1$, а $m>n$. Поэтому

$\left(\dfrac{b}{a}\right)^m<\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, $1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^m>1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, $1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^m<1+$

$+\left(\frac{b}{a}\right)^n$. Поделив почленно предпоследнее неравенство на последнее, получим неравенство, которое требовалось доказать.

667. Пусть $\frac{a}{b}$ — дробь правильная и $k>0$, $a>0$, $b>0$. Нужно доказать, что $\frac{a+k}{b+k}>\frac{a}{b}$. Так как $\frac{a}{b}$ — правильная арифметическая дробь, то $b>a$. Умножая это неравенство почленно на положительную величину k и прибавляя к обеим частям неравенства по величине ab, получим $ab+bk>ab+ak$ или $b+(a+k)>a(b+k)$. Деля теперь обе части неравенства на положительную величину $b(b+k)$, получим $\frac{b(a+k)}{b(b+k)}>\frac{a(b+k)}{b(b+k)}$, или $\frac{a+k}{b+k}>\frac{a}{b}$.

Если $\frac{a}{b}$ — неправильная дробь и $k>0$, $a>0$, $b>0$, то неравенство $\frac{a+k}{b+k}<\frac{a}{b}$ доказывается аналогично.

668. Пусть наименьшая из дробей $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, ..., $\frac{a_n}{b_n}$ будет обозначена через m, а наибольшая — через M. Тогда можно написать: $m\leqslant\frac{a_1}{b_1}\leqslant M$, $m\leqslant\frac{a_2}{b_2}\leqslant M$, ..., $m\leqslant\frac{a_n}{b_n}\leqslant M$. Так как $b_1>0$, $b_2>0$, ..., $b_n>0$, то, освобождаясь от знаменателей, получим:

$$\begin{gathered}mb_1\leqslant a_1\leqslant Mb_1;\\ mb_2\leqslant a_2\leqslant Mb_2;\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ mb_n\leqslant a_n\leqslant Mb_n.\end{gathered}$$

Суммируя почленно и вынося множители m и M за скобки, находим $m(b_1+b_2+\ldots+b_n)\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n\leqslant M(b_1+b_2+\ldots+b_n)$. Наконец, деля члены неравенств на положительную величину $b_1+b_2+\ldots+b_n$, получаем

$$m\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\leqslant M,$$

что и требовалось доказать.

669. $$\frac{(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-2+2=$$

$$=\left(\sqrt[4]{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right)^2+2\geqslant 2.$$

670. $$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy}}=$$

$$= (\sqrt{x} + \sqrt{y})\frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2}}{\sqrt{xy}} =$$

$$= (\sqrt{x} + \sqrt{y})\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} =$$

$$= (\sqrt{x} + \sqrt{y})\left[1 + \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}}\right] > \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

671. а) $\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{\sqrt{a_1^2} + \sqrt{a_2^2} - 2\sqrt{a_1 a_2} + 2\sqrt{a_1 a_2}}{2} =$

$$= \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 + 2}{2} \geqslant \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{2} = \sqrt{a_1 a_2}.$$

Знак равенства возможен только тогда, когда $a_1 = a_2$.

б) Пользуясь только что полученным неравенством, можно написать

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\ \sqrt{a_3 a_4}} \geqslant \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

Знак равенства возможен лишь тогда, когда $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

672. Пусть x и y — два положительных числа, сумма которых равна a. Так как среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел (задача 671, а), то можно написать $\frac{a}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ или $xy \leqslant \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Ни при каком выборе положительных чисел x и y произведение xy не будет больше, чем $\left(\frac{a}{2}\right)^2$. С другой стороны, при $x = y = \frac{a}{2}$ получается произведение $\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Следовательно, наибольшее значение xy получит при $x = y$. Нетрудно видеть, что это решение единственное, т. е. если $x \neq y$, то $xy < \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

673. Обозначим сторону площадки, перпендикулярную стене, буквой x. Тогда параллельная стене сторона будет $100 - 2x$, а площадь $S = x(100 - 2x)$. Нужно найти то значение x, при котором S будет иметь наибольшее значение. Но S и $2S$ достигают своих наибольших значений при одном и том же значении x. Поэтому рассмотрим величину $2S = 2x(100 - 2x)$. Эта последняя является произведением двух положительных чисел $2x$ и $100 - 2x$,

сумма которых есть величина постоянная, равная 100. Наибольшего значения величина $2S$, а следовательно, и S достигнут при $2x = 100 - 2x$ (задача 672). Отсюда $x = 25$.

674. Пусть длина дуги сектора l, радиус r, периметр $2p$ и площадь S. Тогда $S = \frac{1}{2} rl$, $2r + l = 2p$, $r = \frac{1}{2}(2p - l)$ и, следовательно, $S = \frac{1}{4}(2p - l)l$. Наибольшее значение S будет при том же значении l, что и наибольшее значение $4S = (2p - l)l$. Последнее же будет при $2p - l = l$ (см. задачу 672). В этом случае $l = p$, $r = \frac{1}{2} p$ или $l = 2r$.

675. Пусть высота прямоугольника x, его основание и диаметр полукруга $2y$, периметр всей фигуры $2p$ (данная величина) и площадь фигуры S. Тогда

$$S = 2xy + \pi y^2; \quad 2x + 2y + \pi y = 2p; \quad 2x = 2p - 2y - \pi y$$

и, следовательно,

$$S = y(2p - 2y - \pi y) + \pi y^2 = y(2p - 2y - \pi y + \pi y) = 2y(p - y).$$

Окно будет пропускать наибольшее количество света, когда S будет наибольшее. Наибольшее же значение S наступит тогда, когда и наибольшее значение $\frac{1}{2} S = y(p - y)$. Последнее же будет при $y = p - y$ (см задачу 672), т. е. при

$$y = \frac{p}{2} \text{ и } x = \frac{1}{2}(2p - 2y - \pi y) = \frac{2 - \pi}{4} p.$$

676. Возьмем осевое сечение ABC (рис. 5) конуса. Пусть высота $BD = h$, а радиус основания $CD = r$. Тогда объем конуса $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Так как

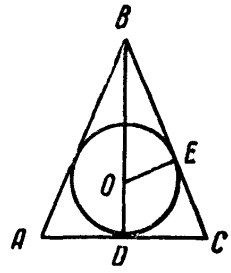


Рис. 5

$$BE = \sqrt{OB^2 - OE^2} = \sqrt{(h - R)^2 - R^2} = \sqrt{h(h - 2R)},$$

то из подобия треугольников BCD и BOE получим:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{\sqrt{h(h - 2R)}}, \quad r^2 = \frac{R^2 h}{h - 2R}.$$

Поэтому

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{h^2}{h - 2R} = \frac{1}{3} \pi R^2 V_1, \text{ где } V_1 = \frac{h^2}{h - 2R}.$$

Величина V будет иметь наименьшее значение одновременно

с величиной V_1. Последняя же будет наименьшей тогда, когда $\frac{1}{V_1}$ будет наибольшей. Но

$$\frac{1}{V_1} = \frac{h-2R}{h^2} = \frac{1}{2R} \cdot \frac{2R}{h}\left(1 - \frac{2R}{h}\right),$$

и так как множитель $\frac{1}{2R}$ постоянный, то при $\frac{2R}{h} = 1 - \frac{2R}{h}$ величина $\frac{1}{V_1}$ примет наибольшее значение (см. задачу 672), а объем V — наименьшее. Найдем соответствующие значения h, r и V. Из равенства $\frac{2R}{h} = 1 - \frac{2R}{h}$ находим:

$$h = 4R,\ r = \frac{Rh}{\sqrt{h(h-2R)}} = R\sqrt{2},$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 8R = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 2V_{\text{шара}}.$$

677. Пусть x и y — два положительных числа, произведение которых равно a. Так как среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел (см. задачу 671, а), то можно написать, что $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{a}$ или $x + y \geqslant 2\sqrt{a}$. Ни при каком выборе положительных чисел x и y сумма $x + y$ не будет меньше, чем $2\sqrt{a}$. С другой стороны, при $x = y = \sqrt{a}$ получается сумма $2\sqrt{a}$. Следовательно, наименьшее значение $x + y$ получит при $x = y$. Нетрудно видеть, что это решение единственное, т. е. если $x \neq y$, то $x + y > 2\sqrt{a}$.

Замечание. В сумме $x + y$ величина $y = \frac{a}{x}$. Поэтому полученный результат можно сформулировать так: величина $u = x + \frac{a}{x}$, где $a > 0$ и $x > 0$ достигает своего наименьшего значения при $x = \sqrt{a}$ и только при этом значении x.

678. Обозначим ширину печатного текста на странице буквой x, а длину — буквой y. Тогда ширина страницы будет $x + 4$, длина $y + 6$, площадь страницы $S = (x + 4)(y + 6)$. Раскрывая в последнем выражении скобки и замечая, что $xy = 216$ (по условию), получим $S = 216 + 6x + 4y + 24$ или $S = 240 + 6x + 4 \cdot \frac{216}{x}$. Нужно найти те значения x, при которых величина S будет иметь наименьшее значение. Но величины $S = 240 + 6\left(x + \frac{144}{x}\right)$ и

$u = x + \dfrac{144}{x}$ достигают своих наименьших значений при одном и том же значении x. Для величины u это значение x равно $\sqrt{144} = 12$ (см. задачу 677). Отсюда получаем, что ширина страницы 16 *см*, а длина 24 *см*.

679. Пользуясь соотношением среднего арифметического и среднего геометрического двух неотрицательных чисел (см. задачу 671, а), получим

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{b^4 + c^4}{2} + \frac{c^4 + a^4}{2} \geqslant \sqrt{a^4b^4} + \sqrt{b^4c^4} +$$

$$+ \sqrt{c^4a^4} = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = a^2 \cdot \frac{b^2 + c^2}{2} + b^2 \cdot \frac{c^2 + a^2}{2} +$$

$$+ c^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant a^2\sqrt{b^2c^2} + b^2\sqrt{c^2a^2} + c^2\sqrt{a^2b^2} =$$

$$= abc(a + b + c).$$

680. Пользуясь формулой $\dfrac{m+n}{2} \geqslant \sqrt{mn}$ (см. задачу 671, а), получим

$$\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_3}{2} +$$

$$+ \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2} = \frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

681. Так как $\dfrac{1 + a_k}{2} \geqslant \sqrt{a_k}$ или $1 + a_k \geqslant 2\sqrt{a_k}$ (задача 671, а), то получим $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \ldots 2\sqrt{a_n} =$

$$= 2^n\sqrt{a_1a_2 \ldots a_n} = 2^n.$$

682. Обозначим: $a_1 = x^3$, $a_2 = y^3$, $a_3 = z^3$. Тогда неравенство примет вид $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geqslant xyz$ и достаточно доказать, что $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geqslant 0$. Но $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ делится на $x + y + z$, что можно проверить по теореме Безу, подставляя в многочлен $x = -y - z$ (см. решение задачи 23). Разделив многочлен на $x + y + z$, получим частное $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$. Поэтому $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) =$

$$= (x + y + z)\left[\frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 + \frac{1}{2}(z - x)^2\right]$$ (см. решение задачи 183). Отсюда, действительно, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geqslant 0$.

683. Справедливость этого неравенства для $n = 2$ была доказана в задаче 671. Предположим, что оно справедливо для $n = k$, и докажем справедливость его для $n = 2k$. Действительно,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2k-1} + a_{2k}}{2k} =$$

$$= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \ldots + \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}}{k} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[k]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \ldots \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[k]{\sqrt{a_1 a_2}\,\sqrt{a_3 a_4} \ldots \sqrt{a_{2k-1}\,a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_{2k}}.$$

Итак, если доказываемая теорема верна для $n = k$, то она верна и для $n = 2k$, а так как она верна для $n = 2$, то она верна также для $n = 4$, $n = 8$ и вообще для $n = 2^m$.

Пусть теперь n не является степенью двух. Добавим к числу n число p так, чтобы было $n + p = 2^m$, и положим

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+p} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Будем иметь

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}}{n+p} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + pa_{n+1}}{n+p} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n+p]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}^p}. \text{ Но } \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + pa_{n+1}}{n+p} =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + p \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}{n+p} =$$

$$= \frac{(n+p)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n(n+p)} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \text{ а}$$

$$\sqrt[n+p]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}^p} = \sqrt[n+p]{a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^p} =$$

$$= \sqrt[n+p]{a_1 a_2 \ldots a_n} \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{\frac{p}{n+p}}. \text{ Поэтому}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n+p]{a_1 a_2 \ldots a_n} \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{\frac{p}{n+p}}$$

$$\text{или } \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{\frac{n}{n+p}} \geqslant \sqrt[n+p]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Возведя последнее неравенство почленно в степень $\frac{n+p}{n}$, получим окончательно $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

684. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, сумма которых равна a. Так как среднее арифметическое любого количества положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел (см. задачу 683), то можно написать, что $\frac{a}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ или $x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{a}{n}\right)^n$.

Ни при каком выборе положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их произведение не будет больше, чем $\left(\frac{a}{n}\right)^n$. С другой стороны, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$ получается произведение $\left(\frac{a}{n}\right)^n$. Следовательно, наибольшее значение произведение $x_1 x_2 \ldots x_n$ получит при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Нетрудно видеть, что это решение единственное, т. е. если среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть неравные, то произведение этих n чисел будет меньше $\left(\frac{a}{n}\right)^n$.

685. Обозначим радиус основания цилиндра через r, его высоту через h, а радиус данного шара через R. Если взять осевое сечение цилиндра, то из него легко установить, что $h = \sqrt{(2R)^2 - (2r)^2} = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Поэтому объем цилиндра $V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \times \sqrt{R^2 - r^2}$. Нужно найти то значение r, при котором объем будет иметь наибольшее значение. Но величины V и V^2 достигают своих наибольших значений при одном и том же значении r. Очевидно, при том же значении r достигает своего наибольшего значения и величина $\frac{1}{2\pi^2} V^2 = 2r^4 (R^2 - r^2)$. Последняя же получит наибольшее значение при $r^2 = 2R^2 - 2r^2$, так как, представив ее в виде $r^2 \cdot r^2 (2R^2 - 2r^2)$, замечаем, что $r^2 + r^2 + 2R^2 - 2r^2 = 2R^2$, и, следовательно, наибольшее значение произведения $r^2 r^2 (2R^2 - 2r^2)$ получится при равенстве всех его множителей (см. задачу 684). Из равенства $r^2 = 2R^2 - 2r^2$ найдем значение радиуса основания цилиндра $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, при котором цилиндр имеет наибольший объем.

686. $1 + (2^n - 1) = 1 + (2 - 1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1) > 1 + n\sqrt[n]{2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \ldots 2 \cdot 1} = 1 + n\sqrt[n]{2^{\frac{(n-1)n}{2}}} = 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$ (см. задачу 683).

687. $n! = \sqrt{(n!)^2} = \sqrt{(1 \cdot n)[2 \cdot (n-1)][3 \cdot (n-2)] \ldots [(n-1) \cdot 1]} =$

$$= \sqrt{1 \cdot n} \cdot \sqrt{2 \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{3 \cdot (n-2)} \ldots \sqrt{n \cdot 1} >$$

$> \frac{1+n}{2} \cdot \frac{2+(n-1)}{2} \cdot \frac{3+(n-2)}{2} \ldots \frac{n+1}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (см. задачу 671).

688. $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot n} < 1 +$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 +$$

$$+ 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

689. $(2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + \ldots + [(n+1) - n]\, n! = 2! - 1! +$
$+ 3! - 2! + \ldots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1 < (n+1)!$

690. $A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} <$

$$< \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}} =$$

$$= \frac{1}{A(2n+1)} < \frac{1}{A \cdot 2n} < \frac{1}{An}.$$

Итак, $A < \frac{1}{An}$, $A^2 < \frac{1}{n}$, $A < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

691. $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = \sqrt[n]{\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}} =$

$$= \sqrt[n]{\frac{(1 \cdot n) \cdot [2 \cdot (n-1)] \ldots [k \cdot (n-k+1)] \ldots (n \cdot 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}}.$$

Но $k(n-k+1) = kn - k(k-1) = kn - n - k(k-1) + n = (k-1)(n-k) + n$. Отсюда видно, что при всяком k, удовлетворяющем неравенствам $1 \leqslant k \leqslant n$, выражение $k(n-k+1) \geqslant n$. Поэтому имеем

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{n^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}}.$$

Отсюда $(\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n})^2 \geqslant n$ и $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \geqslant \sqrt{n}$. Если $n > 2$, то $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} > \sqrt{n}$.

692. Искомое число девятизначное. Поэтому, обозначив его через x^6, можем написать $10^8 < x^6 < 10^9$. Извлекая корень шестой

степени с точностью до единиц, получим $20 < x < 32$. Но сумма цифр числа равна 45, значит, искомое число, а следовательно, и x делится на 3. Таких чисел, больших 20 и меньших 32, всего четыре: 21, 24, 27, 30. Рассматривая данные цифры искомого числа, легко убедиться, что $x = 27$, а искомое число есть $27^6 = 387\,420\,489$.

693. Если обозначить искомое число процентов буквой x, то после прохождения газа через первый фильтр из общего числа примесей, равного $\frac{ax}{100}м^3$, будет поглощено $\frac{axp}{100^2}м^3$, так что останется $\left(\frac{ax}{100} - \frac{axp}{100^2}\right)м^3$ или $\frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)м^3$. Очевидно, после второго фильтра останется $\frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 м^3$, а после n-го $\frac{ax}{100} \times \times \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n м^3$. При поступлении в резервуар к количеству $\left[a - \right.$ $\left. - \frac{ax}{100} + \frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n\right]м^3$ газа прибавится еще $bм^3$, причем прибавится примесей $\frac{bq}{100}м^3$, так что в газовой смеси в резервуаре станет $\left[\frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n + \frac{bq}{100}\right]м^3$ примесей. Это последнее не должно превосходить $r\%$ общего объема газа, находящегося в резервуаре. Поэтому искомое число x удовлетворяет соотношению $\frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n + \frac{bq}{100} \leqslant \frac{r}{100}\left[b + a - \frac{ax}{100} + \frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n\right]$. Из него находим $ax\left[\left(1 - \frac{r}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n + \frac{r}{100}\right] \leqslant (a + b)r - bq$. Так как в левой части полученного неравенства находится положительная величина, то при $(a + b)r < bq$ неравенство, а следовательно, и задача не имеет решения. Если же $(a + b)r > bq$, то получим

$$x \leqslant \frac{(a + b)r - bq}{a\left[\left(1 - \frac{r}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n + \frac{r}{100}\right]}.$$

694. В конце первого года к вкладу в A руб. касса прибавила процентную сумму $\frac{Ap}{100}$, а вкладчик взял со счета B руб. Таким образом, к началу второго года вкладчик имел на книжке сумму $A_1 = A\left(1 + \frac{p}{100}\right) - B$ руб. В конце второго года были произведены такие же операции, отчего сумма A_1 руб. обратилась в сумму

$$A_2 = A_1\left(1+\frac{p}{100}\right) - B = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 - B\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)\right].$$

В конце третьего года вместо суммы в A_2 руб. на книжке была сумма

$$A_2\left(1+\frac{p}{100}\right) - B = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^3 - B\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\right] \text{ руб}$$

Ясно, что в конце x-го года вклад выражался суммой

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)^x - B\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)+\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{p}{100}\right)^{x-1}\right]$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, является суммой x первых членов геометрической прогрессии с первым членом, равным 1, и знаменателем, равным $1+\frac{p}{100}$. Поэтому для суммы вклада получим

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)^x - B\cdot\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^x-1}{1+\frac{p}{100}-1} = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^x -$$

$$-\frac{100B}{p}\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^x-1\right] = \frac{Ap-100B}{p}\left(1+\frac{p}{100}\right)^x+\frac{100B}{p}.$$

Но по условию задачи эта сумма не меньше $3A$. Поэтому получаем $\frac{Ap-100B}{p}\left(1+\frac{p}{100}\right)^x+\frac{100B}{p}\geqslant 3A$. Решив это неравенство, найдем

$$x \geqslant \frac{\lg(3Ap-100B)-\lg(Ap-100B)}{\lg(100+p)-2}.$$

Так как $p>0$, $A>0$, $B>0$ и, кроме того, $Ap>100B$ (сумма вклада возрастала), то все выражения, находящиеся под знаками логарифмов, являются положительными величинами и выражение для x имеет смысл. С другой стороны, если $Ap\leqslant 100B$, то задача не имеет решения.

695. Пусть следует сделать x промывок. В единице непромытого песка содержится $\frac{k}{100}$ единиц чистого золота и $\left(1-\frac{k}{100}\right)$ еди-

ниц примесей. После одной промывки единицы песка золота остается $\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)$ единиц, а примесей — $\left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)$. Очевидно, после двух промывок единицы песка число единиц золота и примесей будет

$$\frac{k}{100}\left[1-\frac{q}{100}-\frac{q}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)\right]=\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)^2$$

$$\text{и}\quad \left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^2,$$

а после x промывок соответственно

$$\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)^x \text{ и } \left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^x.$$

Так как процент содержания золота после x промывок должен быть не менее r, то отсюда получаем неравенство

$$\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)^x \geqslant \frac{r}{100}\left[\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)^x+\left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^x\right].$$

Решаем это неравенство:

$$\frac{k}{100}\left(1-\frac{r}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right)^x \geqslant \frac{r}{100}\left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^x,$$

$$k(100-r)(100-q)^x \geqslant r(100-k)(100-p)^x,$$

$$\left(\frac{100-q}{100-p}\right)^x \geqslant \frac{r(100-k)}{k(100-r)}.$$

Логарифмируем обе части неравенства, причем для определенности будем считать основание логарифмов больше единицы. Если $q<p$, то левая часть неравенства будет больше единицы и мы получим

$$x \geqslant \frac{\log\frac{r(100-k)}{k(100-r)}}{\log\frac{100-q}{100-p}};\quad \text{если } q>p,\ \text{то } x \leqslant \frac{\log\frac{r(100-k)}{k(100-r)}}{\log\frac{100-q}{100-p}};$$

если $q=p$, то x может равняться любому натуральному числу, т. е. любое число промывок сохраняет процент содержания золота. Очевидно, в этом случае задача имеет решение лишь при $k \geqslant r$.

696. Первый раз влили в резервуар чистого спирта $\frac{ap}{100}$ *л*, но после того как из него отлили a *л* смеси, чистого спирта осталось в резервуаре $\frac{ap}{100}\cdot\frac{A}{A+a}$ *л*. Повторение этой операции привело к тому, что число литров спирта в резервуаре стало

$$\left(\frac{ap}{100}\cdot\frac{A}{A+a}+\frac{ap}{100}\right)\frac{A}{A+a}=\frac{ap}{100}\left[\frac{A}{A+a}+\left(\frac{A}{A+a}\right)^2\right].$$

После x таких операций число литров чистого спирта в резервуаре, очевидно, станет равным

$$\frac{ap}{100}\left[\frac{A}{A+a}+\left(\frac{A}{A+a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{A}{A+a}\right)^x\right],$$

а общий объем смеси останется A *л*. Так как процент содержания спирта должен быть не менее q, то отсюда получаем неравенство

$$\frac{ap}{100}\left[\frac{A}{A+a}+\left(\frac{A}{A+a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{A}{A+a}\right)^x\right]\geqslant\frac{Aq}{100},$$

которое приводится к такому: $p\left[1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^x\right]\geqslant q$. Отсюда найдем, что $x\geqslant\dfrac{\lg\frac{p-q}{p}}{\lg\frac{A}{A+a}}$, при этом должно быть $p>q$. Если же $p\leqslant q$, то задача не имеет решения.

697. $a\cos x+b\sin x=a\left(\cos x+\dfrac{b}{a}\sin x\right)=a(\cos x+$

$$+\operatorname{tg}\varphi\sin x)=\frac{a}{\cos\varphi}(\cos x\cos\varphi+\sin x\sin\varphi)=$$

$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$. Поэтому $|a\cos x+b\sin x|=$

$=\sqrt{a^2+b^2}\,|\cos(x-\varphi)|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ или $-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a\cos x+$

$$+b\sin x\leqslant\sqrt{a^2+b^2}.$$

Следовательно, наименьшее значение данного выражения будет $-\sqrt{a^2+b^2}$, а наибольшее $\sqrt{a^2+b^2}$.

698. $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=a\cdot\dfrac{1-\cos2x}{2}+$

$$+b\cdot\frac{\sin2x}{2}+c\cdot\frac{1+\cos2x}{2}=\frac{c+a}{2}+\frac{1}{2}[(c-a)\cos2x+b\sin2x]=$$

$$=\frac{c+a}{2}+\frac{c-a}{2}\left(\cos2x+\frac{b}{c-a}\sin2x\right)=\frac{c+a}{2}+$$

$$+\frac{c-a}{2}(\cos2x+\operatorname{tg}\varphi\sin2x)=\frac{c+a}{2}+\frac{c-a}{2\cos\varphi}(\cos2x\cos\varphi+$$

$+\sin2x\sin\varphi)=\dfrac{c+a}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+(c-a)^2}\cos(2x-\varphi)$. Если

$\cos(2x-\varphi)=1$, то получим наибольшее значение, равное $\frac{c+a}{2}+\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}$, а при $\cos(2x-\varphi)=-1$ будем иметь наименьшее значение, равное $\frac{c+a}{2}-\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}$.

Полученный результат верен и при $a=c$.

699. Так как $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\cos A\cos B\cos C+2$ (см. задачу 484) и $2\cos A\cos B\cos C>0$, поскольку A, B и C острые углы, то $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$.

700. $\frac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}=\frac{2\sin x\cos x+2\sin^2 x}{2\sin x\cos x-2\sin^2 x}=$ $=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$. Поэтому неравенство равносильно такому: $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}>0$ или $(1+\operatorname{tg} x)(1-\operatorname{tg} x)>0$, исключая $x=k\pi$, при котором левая часть данного неравенства теряет смысл, но которое является решением преобразованного неравенства. Таким образом, получаем: $1-\operatorname{tg}^2 x>0$, $\operatorname{tg}^2 x<1$, $|\operatorname{tg} x|<1$, $-1<\operatorname{tg} x<1$, $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi$, $k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$.

701. В этом случае должно выполняться неравенство $\cos x<0$. Но тогда $\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi$.

702. Так как $|\sin x|\leqslant 1$ и основание логарифмов больше единицы (логарифм десятичный), то неравенство равносильно такому: $\sin x>0$. Следовательно, $2k\pi<x<(2k+1)\pi$.

703. $\cos(\sin x)>0$ при любых x, потому что $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, а углы, заключенные между -1 радиан и $+1$ радиан, находятся в первом и четвертом квадрантах, где косинус положительный.

704. Должно быть $-1\leqslant\frac{\pi}{2}\arcsin x\leqslant 1$ или $-\frac{2}{\pi}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{2}{\pi}$. Отсюда $-\sin\frac{2}{\pi}\leqslant x\leqslant\sin\frac{2}{\pi}$.

705. Должно быть $0<\lg x\leqslant 1$. Отсюда $1<x\leqslant 10$.

706. Должно быть $2k\pi\leqslant\frac{1}{x^2}<(2k+1)\pi$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Если $k=0$, то $\frac{1}{x^2}<\pi$, $x^2>\frac{1}{\pi}$, $|x|>\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Это возможно, когда: а) $x>\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ и б) $x<-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Если $k=1,2,3,\ldots$, то $\frac{1}{(2k+1)\pi}<$

$< x^2 < \frac{1}{2k\pi}$ или $\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}} < |x| < \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$. Это возможно, когда в) $\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}} < x < \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$ ($x>0$, $|x| = x$) и г) $\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}} < -x < \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$ или $-\frac{1}{\sqrt{2k\pi}} < x < -\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}$ ($x < 0$, $|x| = -x$).

707. Так как $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ — положительные числа, то, пользуясь тем, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел (см. задачу 671, а), можем написать

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} + \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} + \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} +$$

$$+ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} +$$

$$+ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} +$$

$$+ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} +$$

$$+ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\gamma}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} +$$

$$+ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} +$$

$$+ 1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 1.$$

Для того чтобы имело место равенство

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Действительно, последнее можно записать так:

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} +$$

$$+ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ или } \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0.$$

Но это будет иметь место тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, а так как α, β, γ — острые углы, сумма которых равна π, то это приводит к условию $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

708. Нужно доказать две теоремы:

I. Дано: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Доказать: $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha < 1$.

II. Дано: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$,

$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha < 1$.

Доказать: $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Доказательство I. $0 < \gamma < \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) < \frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$.

Итак, $\operatorname{tg}\gamma < \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$. Умножим обе части неравенства на $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta > 0$. Получим $\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) < 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha < 1$.

Доказательство II. Перепишем данное неравенство так: $\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) < 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Отсюда видим, что $1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta > 0$. Разделив обе части неравенства на $(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\gamma > 0$, получим

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} < \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} = \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\text{или } \operatorname{tg}(\alpha+\beta)<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right).$$

Но так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)>0$, то $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. Поэтому из неравенства $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$ вытекает $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}-\gamma$ или $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$.

709. $1+\operatorname{ctg}\varphi=1+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=$

$$=\frac{1-\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+1-1\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=\frac{2-\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1\right)^2}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1\right)^2\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},\text{ так как}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1\right)^2\geqslant 0 \text{ при условии } 0<\varphi<\pi.$$

710. Раз угол γ тупой, то $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$. Но тогда $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. Итак, $\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. Умножая обе части неравенства на $\operatorname{tg}\beta>0$, получим $\operatorname{tg}\alpha\times\operatorname{tg}\beta<1$.

711. Обозначим левую часть неравенства буквой A. Будем иметь

$$A=\cos^2\alpha+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\frac{1+\cos 2\gamma}{2}=\cos^2\alpha+1+\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)=\cos^2\alpha+\cos(\pi-\alpha)\cos(\beta-\gamma)+1=\cos^2\alpha-\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha+1.$$

Иначе $\cos^2\alpha-\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha+1-A=0$. Рассматриваем последнее как квадратное уравнение относительно $\cos\alpha$. Для того чтобы $\cos\alpha$ был вещественным, дискриминант этого уравнения должен быть неотрицательным, т. е. должно быть $\cos^2(\beta-\gamma)-4(1-A)\geqslant 0$. Отсюда $4(1-A)\leqslant\cos^2(\beta-\gamma)\leqslant 1$ или $1-A\leqslant\frac{1}{4}$. Таким образом, получаем $A\geqslant\frac{3}{4}$.

Отсюда же легко усмотреть, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{3}{4}$ тогда и только тогда, когда $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

712. $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\right.$

$\left.-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[-\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\right.\right.$

$\left.\left.+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\right.\right.$

$\left.\left.-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$

713. Построим острый угол AOB (рис. 6), хорду AB и касательную AC в точке A к окружности радиуса r с центром в вершине O угла. Очевидно, $S_{\triangle AOB}<S_{\text{сект.}OAB}<S_{\triangle AOC}$. Если x есть радианная мера угла AOB, то предыдущее неравенство можно записать так: $\frac{1}{2}r^2\sin x<\frac{1}{2}r^2x<\frac{1}{2}r^2\operatorname{tg}x$ или по сокращении на $\frac{1}{2}r^2>0$ $\sin x<x<\operatorname{tg}x$. Следует заметить, что неравенство $\sin x<x$ верно при всяком $x>0$, а $|\sin x|<|x|$ при любом вещественном $x\neq 0$.

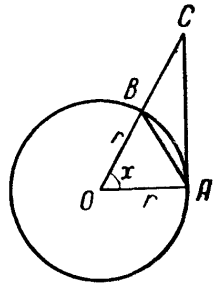


Рис. 6

714. а) $\sin\beta-\sin\alpha=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}<2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, так как $0<\cos\frac{\alpha+\beta}{2}<1$. Но известно, что если $x>0$, то $\sin x<x$. Поэтому $2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}<2\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}=\beta-\alpha$ $(\beta-\alpha>0)$. Таким образом, $\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$ и $\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta$.

б) $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}<\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha$, так как $0<\frac{1}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}<1$. Но если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}x>x$. Поэтому $\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha>\operatorname{tg}(\beta-\alpha)>\beta-\alpha$. Отсюда $\alpha-\operatorname{tg}\alpha>\beta-\operatorname{tg}\beta$.

715. I. Обозначим $\beta - \alpha = \delta > 0$. Тогда $\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\beta}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta}(\beta\sin\alpha - \alpha\sin\beta) = \frac{1}{\alpha\beta}[(\alpha+\delta)\sin\alpha - \alpha\sin(\alpha+\delta)] = \frac{1}{\alpha\beta}(\alpha\sin\alpha + \delta\sin\alpha - \alpha\sin\alpha\cos\delta - \alpha\cos\alpha\sin\delta) = \frac{1}{\alpha\beta}\left[\alpha\sin\alpha(1-\cos\delta) + \alpha\delta\cos\alpha\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\delta}{\delta}\right)\right]$.

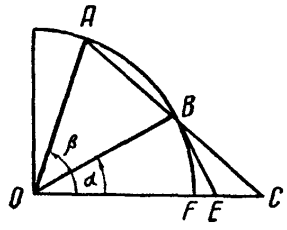


Рис. 7

Но оба слагаемых в квадратных скобках положительны. Действительно, положительность первого очевидна, а в положительности второго можно убедиться на основании неравенств $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ для $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (см. задачу 713), из которых следует, что $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} > 1$, а $0 < \frac{\sin\delta}{\delta} < 1$. Поэтому $\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\beta}{\beta} > 0$ и $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\beta}{\beta}$.

II. Докажем неравенство геометрически. Из треугольников OCB и OCA (рис. 7) на основании теоремы синусов получим

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{OA}{\sin C}, \quad \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin C} = \frac{OA}{\sin C}.$$

Отсюда $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}$ или $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{AC}{BC} = \frac{BC+AB}{BC} = 1 + \frac{AB}{BC}$. Полагая радиус окружности равным единице, можем написать $\cup AF = \beta$, $\cup BF = \alpha$. Поэтому $AB < \cup AB = \beta - \alpha$, $BC > BE = \operatorname{tg}\alpha > \alpha$ (см. задачу 713). Возвращаясь к равенству $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 1 + \frac{AB}{BC}$, заменим в нем AB на $\beta - \alpha$, а BC на α, отчего получим $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < 1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\beta}{\alpha}$ или $\frac{\sin\beta}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

716. Возьмем любой x, удовлетворяющий условиям $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Тогда, положив в неравенстве задачи 715 $\alpha = x$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, получим $\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$ или $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

717. I. Обозначим $\beta - \alpha = \delta > 0$. Тогда $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta}(\alpha\operatorname{tg}\beta - \beta\operatorname{tg}\alpha) = \frac{1}{\alpha\beta}[\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\delta) - (\alpha+\delta)\operatorname{tg}\alpha] = \frac{1}{\alpha\beta}\{\alpha[\operatorname{tg}(\alpha+\delta) - \operatorname{tg}\alpha] - \delta\operatorname{tg}\alpha\} = \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha\sin\delta}{\cos(\alpha+\delta)\cos\alpha} - \delta\operatorname{tg}\alpha\right) > \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha\sin\delta}{\cos\alpha} - \frac{\delta\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{\delta}{\beta\cos\alpha}\left(\frac{\sin\delta}{\delta} - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$.

а) Если $\delta < \alpha$, то $\frac{\sin\delta}{\delta} - \frac{\sin\alpha}{\alpha} > 0$ (см. задачу 715) и тогда $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} > \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}$.

б) Если $\delta \geqslant \alpha$, то между числами α и β можно вставить числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ так, чтобы было $0 < \alpha < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_k < \beta < \frac{\pi}{2}$, а разности $\gamma_1 - \alpha$, $\gamma_2 - \gamma_1$, ..., $\beta - \gamma_k$ были бы меньше α. Тогда на основании случая «а» получим $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} > \frac{\operatorname{tg}\gamma_k}{\gamma_k} > \ldots > \frac{\operatorname{tg}\gamma_1}{\gamma_1} > \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}$.

II. Дадим геометрическое доказательство. Пусть AD и AE (рис. 8) — дуги окружности радиуса единица с центром в точке O, равные соответственно α и β. Пусть B и C — точки пересечения касательной к окружности в точке A с продолжениями радиусов OD и OE. Проведем через точку D прямую $MN \parallel AC$ и пусть M и N — точки пересечения ее с прямыми OC и OA. Тогда можно написать

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{AC}{AB} = \frac{MN}{DN} = \frac{DN + DM}{DN} = 1 + \frac{DM}{DN} \quad (*)$$

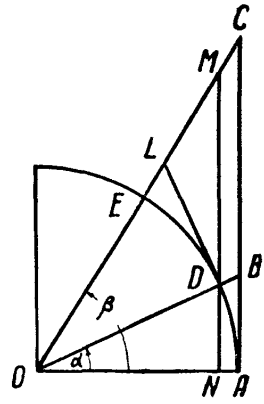


Рис. 8

Проведем касательную LD к окружности в точке D и пусть L — точка пересечения ее с продолжением радиуса OE. Очевидно, $DM > DL = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) > \beta - \alpha$, а $DN = \sin\alpha < \alpha = \smile DA$ (см. задачу 713), следовательно, $\frac{DM}{DN} > \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$. Тогда из равенства (*) получим $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} > 1 + \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$, $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} > \frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} > \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}$.

X.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

718. Нельзя. Понятие «больше» и «меньше» неприменимо к комплексным числам.

719. Отрицательное число есть вещественное число, которое меньше нуля. К комплексным же числам понятие «меньше» неприменимо. Поэтому нельзя число $-5i$ назвать отрицательным.

720. Запишем данное равенство так:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1.$$

Но

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i.$$

Поэтому получим $i^n = 1$. Отсюда $n = 4k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

721. Освободившись от знаменателя, получим $x + 1 + (y-3)i = 2 + 8i$. Два комплексных числа равны, когда равны их вещественные части и равны их мнимые части. Поэтому имеем

$$\begin{cases} x + 1 = 2; \\ y - 3 = 8. \end{cases}$$

Отсюда $x = 1$, $y = 11$.

722. Умножим обе части уравнения на $-i$. Получим

$$(x+y)^2 + 6 + xi = yi + 5(x+y) + i.$$

Приравниваем вещественные части

$$(x+y)^2 + 6 = 5(x+y) \text{ и мнимые части } x = y + 1.$$

В полученной системе

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 5(x+y) + 6 = 0; \\ x - y = 1 \end{cases}$$

первое уравнение решаем как квадратное относительно $x + y$. Получим $x + y = \frac{5 \pm 1}{2}$. Остается решить системы:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 1; \\ x + y = 3; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} x - y = 1; \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

723. Из первого уравнения находим $x = 0$, $y = -1$. Подставляя найденные значения x и y во второе уравнение, получим $a = 0$.

724. Уравнение можно записать так: $\sqrt{x^2+y^2} - (x+iy) = 1 + 2i$. Отсюда $\sqrt{x^2+y^2} - x = 1$, $-y = 2$. Решив систему, найдем: $x = \frac{3}{2}$, $y = -2$, $z = \frac{3}{2} - 2i$.

725. $\sqrt{x^2+y^2} + (x+iy) = 2 + i$, $\sqrt{x^2+y^2} + x = 2$, $y = 1$. Отсюда: $x = \frac{3}{4}$, $y = 1$, $z = \frac{3}{4} + i$.

726. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$, $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.

Поэтому $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2x_1^2 + 2y_1^2 + 2x_2^2 + 2y_2^2 = 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_2^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

727—758. Указание. В этих задачах часто используется тригонометрическая форма комплексного числа и его геометрическое изображение. Напомним, что любое комплексное число $\alpha = a + bi \neq 0$ можно преобразовать к виду $\alpha = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Последнее выражение называется тригонометрической формой комплексного числа. Число $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем комплексного числа α, а угол φ — его аргументом. Аргумент определяется формулами: $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$. Модуль $\rho \geqslant 0$, а аргумент φ может принимать бесконечное множество значений, так как $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ не меняют своей величины, если φ изменить на $2k\pi$, где k — целое число. Обычно для φ берут наименьшее по абсолютной величине значение, т. е. такое, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Это значение аргумента называется главным.

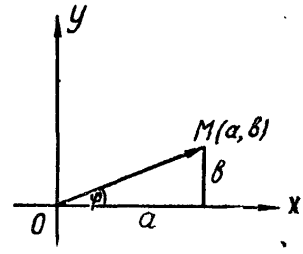


Рис. 9

Комплексное число $\alpha = a + bi$ условились геометрически изображать точкой M, у которой в данной прямоугольной системе координат абсцисса равна a, а ордината b (рис. 9.) По этой причине ось абсцисс называется вещественной осью, а ось ординат — мнимой осью. Комплексное число также изображают направленным отрезком OM, т. е. отрезком прямой, у которого указано, какая из ограничивающих его точек является началом и какая концом. В данном случае O есть начало, а M — конец. Такой направленный отрезок называется вектором. Вектор, имеющий началом точку O, а концом точку M, обозначается так: $\overrightarrow{OM}$. Направление вектора ука-

зывает стрелка на его конце. Таким образом, комплексное число $a = a + bi$ изображают вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с точкой M (a, b).

Длина вектора, т. е. длина отрезка OM, дает геометрическое изображение модуля числа, а угол, образованный осью абсцисс и вектором, т. е $\angle XOM$, дает изображение аргумента. Очевидно, вещественным числам соответствуют точки, лежащие на вещественной оси, а чисто мнимым числам — на мнимой оси.

727. $\rho = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$

$$= 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = 2\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\varphi\frac{1-\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\pi-\alpha}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\pi-\alpha}{2}.$$

Главное значение $\varphi = \frac{\pi-\alpha}{2}$, а данное число $z = 2\sin\frac{\alpha}{2} \times$

$$\times\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right).$$

728. $\rho = \sqrt{(1+\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} =$

$$= 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right), \cos\varphi = \frac{1+\sin\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right), \quad \sin\varphi = \frac{\cos\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Главное значение $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$, а данное число

$$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

729. $\rho = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{\sec^2\alpha} = |\sec\alpha| = -\sec\alpha,$

$$\cos\varphi = \frac{1}{-\sec\alpha} = -\cos\alpha = \cos(\alpha-\pi), \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{-\sec\alpha} =$$

$$= -\sin\alpha = \sin(\alpha-\pi), \quad 1 + i\operatorname{tg}\alpha = -\sec\alpha\,[\cos(\alpha-\pi) + i\sin(\alpha-\pi)].$$

730. а) Геометрически модулю комплексного числа z соответствует расстояние от точки плоскости, изображающей число z, до начала координат. В данном случае это расстояние равно 2. Следовательно, равенству $|z| = 2$ соответствуют точки окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 2 (рис. 10).

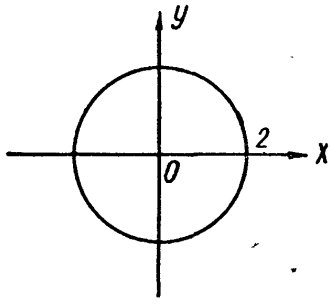


Рис. 10

б) Так как равенству $|z| = 2$ соответствуют точки окружности с радиусом 2 и с центром в начале координат, то неравенству $|z| < 2$ соответствуют точки круга, ограниченного этой окружностью, исключая точки окружности. Аналогично числам $|z| > 1$ соответствуют точки, расположенные вне круга, ограниченного окружностью радиуса единица с центром в начале координат, исключая точки этой окружности. Поэтому числам z, удовлетворяющим соотношениям $1 < |z| < 2$, соответствуют точки, расположенные в кольце между двумя концентрическими окружностями радиусов *1* и *2* и имеющими центр в начале координат, исключая точки этих окружностей (рис. 11).

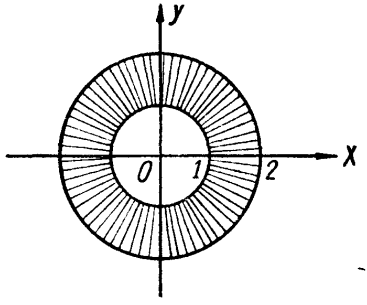


Рис. 11

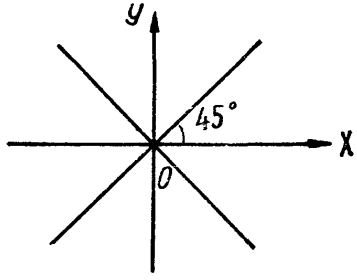


Рис. 12

в) Так как $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, то $R(z^2) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Следовательно, равенство $R(z^2) = 0$ распадается на два: $x - y = 0$ и $x + y = 0$. Эти уравнения являются уравнениями биссектрис координатных углов. Поэтому точки, соответствующие соотношению $R(z^2) = 0$, расположены на биссектрисах четырех координатных углов (рис. 12).

г) Так как $\operatorname{Im}(z) = y$, то данное неравенство запишется так: $y > \frac{1}{2}$. Отсюда видно, что точки находятся выше прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на расстояние, равное $\frac{1}{2}$ (рис. 13).

д) $|z-1| \leqslant |z+1|$, $|z-1|^2 \leqslant |z+1|^2$, $(x-1)^2+y^2 \leqslant (x+1)^2+y^2$, $x^2-2x+1+y^2 \leqslant x^2+2x+1+y^2$, $-2x \leqslant 2x$, $4x \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Отсюда видим, что точки находятся в полуплоскости, расположенной правее оси ординат, включая ось ординат (рис. 14).

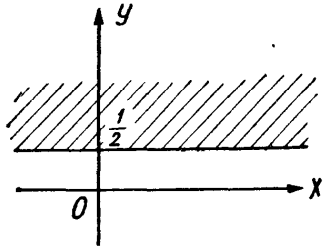


Рис. 13

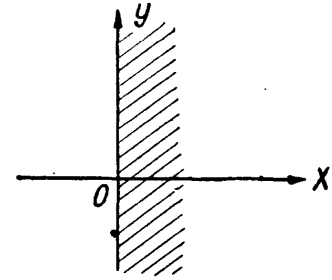


Рис. 14

731. а) Аргументом комплексного числа z называется величина угла, образованного полупрямой, проведенной из начала координат через точку, являющуюся изображением z, с положительным направлением оси абсцисс (вещественной оси). Поэтому равенству $\arg z = \frac{\pi}{3}$ соответствуют точки полупрямой, выходящей из начала

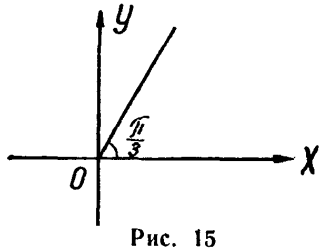


Рис. 15

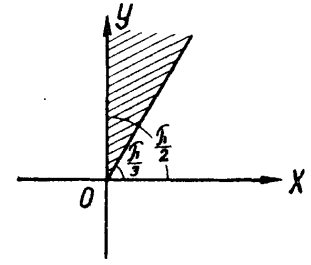


Рис. 16

координат, наклоненной к оси абсцисс под углом $\frac{\pi}{3}$ (рис. 15).

б) Учитывая сказанное в пункте «а», легко убедиться, что числам, аргументы которых удовлетворяют соотношениям $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}$, соответствуют точки плоскости, расположенные внутри угла, заключенного между полупрямой, выходящей из начала координат под углом $\frac{\pi}{3}$ к положительному направлению оси абсцисс, и положительным направлением оси ординат. При этом точки, расположенные на сторонах угла, исключаются (рис. 16).

732. а) Во втором и третьем координатных углах, исключая точки оси ординат (рис. 17).

б) В первом и втором координатных углах, включая точки оси абсцисс (рис. 18).

733. Окружность радиуса 1 в направлении, обратном движению часовой стрелки. Центр этой окружности симметричен центру данной окружности относительно оси абсцисс.

734. $z_1 z_2 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$
$\rho_1 \rho_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] =$
$= \rho_1 \rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$

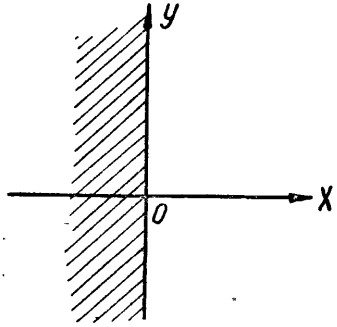


Рис. 17

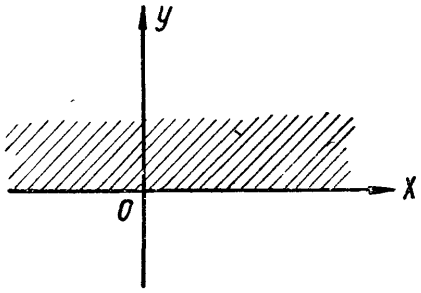


Рис. 18

735. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} =$

$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} =$

$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) [\cos (-\varphi_2) + i \sin (-\varphi_2)] =$

$= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)].$

736. Так как $z^n = \underbrace{z \cdot z \ldots z}_{n}$ и аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей (см. задачу 734), то отсюда и следует формула Муавра.

737. Так как $z^{-k} = \frac{1}{z^k}$, то, положив $n = -m$ $(m > 0)$, получим

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-m} = \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^m} =$$

$$\frac{1}{\cos m\varphi + i \sin m\varphi} = \cos m\varphi - i \sin m\varphi = \cos (-m) \varphi +$$
$$+ i \sin (-m) \varphi = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

738. Модуль числителя равен

$$\sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = x^2 + y^2.$$

Модуль знаменателя равен

$$\sqrt{(xy\sqrt{2})^2+(\sqrt{x^4+y^4})^2}=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2.$$

Так как модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, то

$$\left|\frac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+i\sqrt{x^4+y^4}}\right|=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

739. $(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)=a^2\omega^3+ab\omega^2+ab\omega^4+b^2\omega^3.$

Но $\omega^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$

$$\omega^2+\omega=-1.$$

Поэтому данное выражение

$$A=a^2+ab\omega^2+ab\omega+b^2=a^2+ab(\omega^2+\omega)+b^2=a^2-ab+b^2.$$

740. Так как $\omega^3=1$, а $\omega^2+\omega=-1$ (см. задачу 739), то

$$(a+b+c)[a^2+ab(\omega^2+\omega)+ac(\omega^2+\omega)+bc(\omega^2+\omega\cdot\omega^3)+$$
$$+b^2\omega^3+c^2\omega^3]=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$

(см. решение задачи 682).

741. Эту задачу можно решить непосредственным перемножением. Но такой путь длинный и утомительный. Поступим иначе. Обозначив данное выражение буквой A, преобразуем его, пользуясь формулой суммы кубов двух количеств и соотношением $\omega^2+\omega=-1$ (см. решение задачи 739). Получим

$$A=(a+b\omega+c\omega^2+a+b\omega^2+c\omega)\varphi_1,$$

где φ_1 — краткое обозначение неполного квадрата разности данных двух количеств. Отсюда

$$A=(2a-b-c)\varphi_1.$$

Но нетрудно видеть, что A симметрично относительно a, b и c, т. е. не меняет своей величины от одновременной замены a на b, b на c и c на a. Действительно, преобразуем A, используя равенство $\omega^3=1$ (см. задачу 739). Получим

$$A=(a\omega^3+b\omega+c\omega^2)^3+(a\omega^3+b\omega^2+c\omega^4)^3=\omega^3(b+c\omega+a\omega^2)^3+$$
$$+\omega^6(b+c\omega^2+a\omega)^3=(b+c\omega+a\omega^2)^3+(b+c\omega^2+a\omega)^3.$$

Аналогично можно показать, что

$$A=(c+a\omega+b\omega^2)^3+(c+a\omega^2+b\omega)^3.$$

В силу этого можно утверждать, что A имеет также множителями многочлены $2b-c-a$ и $2c-a-b$. Поэтому

$$A=(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)\varphi_2,$$

где φ_2 — частное от деления A на $(2a-b-c)(2b-c-a)\times$ $\times(2c-a-b)$. Замечая теперь, что коэффициент при высшей степени a многочлена A равен 2, устанавливаем на основании равенства многочленов, что $\varphi_2 = 1$. Итак,

$$A = (2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b).$$

742. Пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Тогда получим:

$$z^{142} + \frac{1}{z^{142}} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{142} + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-142} =$$

$$= \cos 142\alpha + i\sin 142\alpha + \cos 142\alpha - i\sin 142\alpha = 2\cos 142\alpha.$$

Но из уравнения $z + \frac{1}{z} = 1$ получим:

$$z^2 - z + 1 = 0,\quad z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i =$$

$$= \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right).$$

Итак,

$$z^{142} + \frac{1}{z^{142}} = 2\cos\frac{142\pi}{3} = 2\cos\frac{4}{3}\pi = -2\cos\frac{\pi}{3} = -1.$$

743. Положив в формуле Муавра (см задачу 736) $n = 5$, получим

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha$$

или

$$\cos^5\alpha + 5i\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha - 10i\cos^2\alpha\sin^3\alpha +$$
$$+ 5\cos\alpha\sin^4\alpha + i\sin^5\alpha = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha.$$

Приравняв мнимые части и положив в них $\alpha = \arcsin x$, найдем, что

$$\sin(5\arcsin x) = 5\cos^4(\arcsin x)\sin(\arcsin x) -$$
$$- 10\cos^2(\arcsin x)\sin^3(\arcsin x) + \sin^5(\arcsin x) =$$
$$= 5(\sqrt{1-x^2})^4 x - 10(\sqrt{1-x^2})^2 x^3 + x^5 = 5(1-x^2)^2 x -$$
$$- 10(1-x^2)x^3 + x^5.$$

Отсюда

$$\sin(5\arcsin x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

744. Обозначим сумму синусов буквой A, а сумму косинусов буквой B и, положив затем $z = \cos x + i\sin x$, получим

$$B + Ai = (\cos x + i\sin x) + (\cos 3x + i\sin 3x) + \ldots +$$
$$+ [\cos(2n-1)x + i\sin(2n-1)x] = z + z^3 + \ldots + z^{2n-1} =$$

$$= \frac{z(z^{2n}-1)}{z^2-1} = \frac{(\cos x + i\sin x)(\cos 2nx + i\sin 2nx - 1)}{\cos 2x + i\sin 2x - 1} =$$

$$= \frac{(\cos x + i\sin x)(-2\sin^2 nx + 2i\sin nx\cos nx)}{-2\sin^2 x + 2i\sin x\cos x} =$$

$$= \frac{(\cos x + i\sin x)\cdot 2i\sin nx(\cos nx + i\sin nx)}{2i\sin x(\cos x + i\sin x)} =$$

$$= \frac{\sin nx}{\sin x}(\cos nx + i\sin nx).$$

Итак,

$$B + iA = \frac{\sin nx}{\sin x}\cos nx + i\frac{\sin nx}{\sin x}\sin nx.$$

Отсюда:

$$B = \frac{\sin nx}{\sin x}\cos nx = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}; \quad A = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Конечно, эту задачу можно было бы решить и способом, примененным в задаче 517.

745. Умножим обе части данного уравнения на x^{-n} и в полученном результате положим

$$x^{-k} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-k} = \cos k\alpha - i\sin k\alpha.$$

Получим

$$1 + p_1 x^{-1} + p_2 x^{-2} + \ldots + p_n x^{-n} = 0,\ 1 + p_1(\cos\alpha - i\sin\alpha) +$$
$$+ p_2(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha) + \ldots + p_n(\cos n\alpha - i\sin n\alpha) = 0.$$

Так как $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — вещественные, то

$$p_1\sin\alpha_1 + p_2\sin 2\alpha + \ldots + p_n\sin n\alpha = 0$$

как мнимая часть числа, равного нулю.

746. Так как $S_1 + iS_2 = (1+i)^n$, $(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$, то, пользуясь формулой Муавра, можем написать $S_1 + iS_2 = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$. Приравнивая теперь вещественные части этого равенства, а затем мнимые, получим:

$$S_1 = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}; \qquad S_2 = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

747. Докажем, что $S\sqrt{3}$ является мнимой частью выражения $(1+i\sqrt{3})^n$. Действительно,

$$(1+i\sqrt{3})^n = 1 + C_n^1 i\sqrt{3} + C_n^2 (i\sqrt{3})^2 + C_n^3 (i\sqrt{3})^3 + \ldots =$$
$$= 1 - C_n^2 \cdot 3 + C_n^4 \cdot 3^2 + \ldots + i\sqrt{3}(C_n^1 - C_n^3 \cdot 3 + C_n^5 \cdot 3^2 - \ldots).$$

С другой стороны, пользуясь формулой Муавра, можем написать

$$(1+i\sqrt{3})^n = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

$$\text{Отсюда } S = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Любопытно отметить, что если в решении исходить из бинома $(-1+i\sqrt{3})^n$, то ответ будет такой:

$$S = (-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Полезно доказать тождественность этих двух выражений для S.

748. Число w называется корнем степени n из числа z, который обозначается $\sqrt[n]{z}$, если $w^n = z$.

Пусть

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = R(\cos\Phi + i\sin\Phi).$$

На основании определения корня и формулы Муавра будем иметь

$$R^n(\cos n\Phi + i\sin n\Phi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Но если комплексные числа равны, то их модули равны, а аргументы отличаются на число $2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Таким образом,

$$R^n = \rho,\quad \Phi = \varphi + 2k\pi.$$

Отсюда

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

причем $\sqrt[n]{\rho}$ — арифметический.

Нет надобности придавать k всевозможные целые значения, а достаточно брать лишь $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Действительно, если $k \geqslant n$ или $k < 0$, то, выделив целую часть q дроби $\frac{k}{n}$, получим $k = qn + r$, где положительный остаток $r < n$. Но тогда

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi+2(qn+r)\pi}{n} = 2q\pi + \frac{\varphi+2r\pi}{n}$$

и значения косинуса и синуса в силу периодичности будут такими же, как и при одном из $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

С другой стороны, при различных k, взятых из чисел $0, 1, 2, \ldots, n-1$, значения корней будут различными. На самом деле, если при k_1 и k_2, где $0 \leqslant k_1 \leqslant n-1$ и $0 \leqslant k_2 \leqslant n-1$, имеет место равенство значений корня, то должно быть

$$\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} = 2m\pi \text{ или } k_1 - k_2 = mn,$$

что возможно только при $m = 0$ (m — целое). Но тогда $k_1 = k_2$. Итак, корень степени n из комплексного числа имеет n и только n различных значений. Исключение представляет лишь $z = 0$. В этом случае все значения корня равны между собой и равны нулю.

749. Положив $\sqrt{a + bi} = x + yi$, получим: $a + bi = (x + yi)^2$; $a + bi = x^2 - y^2 + 2xyi$. На основании равенства комплексных чисел можем написать: $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$. Подставив $y = \frac{b}{2x}$, найденное из второго уравнения, в первое, получаем:

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0, \quad x^2 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{4} =$$

$$= \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{a + \rho}{2}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{\rho + a}{2}}$$

$\left(\text{значение } \frac{a - \rho}{2} < 0 \text{ и поэтому отброшено}\right)$. Тогда

$$y = \frac{b}{2x} = \frac{b}{\pm\sqrt{2(\rho + a)}} = \pm\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}.$$

Отсюда

$$\sqrt{a + bi} = \pm\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}.$$

Из равенства $2xy = b$ видно, что знаки перед радикалами нужно взять одинаковые, если $b > 0$, и разные, если $b < 0$

750. а) $z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{4k+1}{6}\pi +$

$$+ i\sin\frac{4k+1}{6}\pi; \quad k = 0, 1, 2; \quad z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{i}{2}, \quad z_2 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$z_3 = \cos\frac{9}{6}\pi + i\sin\frac{9}{6}\pi = -i;$$

б) $\sqrt{1+\sqrt{3}i} = \pm\left(\sqrt{\frac{2+1}{6}} + i\sqrt{\frac{2-1}{6}}\right) =$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}};$$

в) $\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5};$

$k = 0, 1, 2, 3, 4.$

751. Корни уравнения $x^n = 1$ суть $\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда: $\alpha_0 = 1$;

$$\alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n};\ \alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} =$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \alpha_1^k.$$

Положив $\alpha_1 = \alpha$, можно записать эти корни в виде $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$.

752. Из формулы $z = \sqrt[6]{i} = \cos\frac{4k+1}{12}\pi + i\sin\frac{4k+1}{12}\pi$ видно, что значение $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$ имеет модуль $\rho = 1$, а аргумент $\varphi = \frac{\pi}{12}$. Остальные корни $z_2, z_3, \ldots, z_6$ также имеют модули, равные единице, а аргумент каждого следующего отличается от аргумента предыдущего на величину $\frac{\pi}{3}$. Поэтому геометрически корням $z_1, z_2, \ldots, z_6$ будут соответствовать вершины правильного шестиугольника, изображенного на рис. 19.

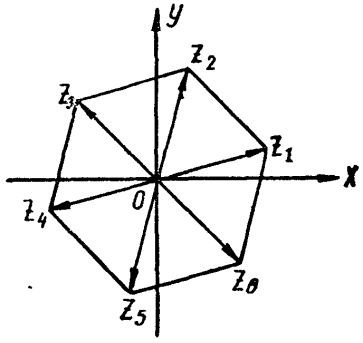


Рис. 19

753. $x = \frac{-(2i-1) \pm \sqrt{(2i-1)^2 + 4(7+i)}}{2} =$

$$= \frac{-(2i-1) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-2i+1\pm 5}{2};\ x_1 = 3-i,\ x_2 = -2-i.$$

754. $x = \frac{3+i \pm \sqrt{(3+i)^2 - 12i}}{2} = \frac{3+i\pm(3-i)}{2};$

$x_1 = 3,\ x_2 = i.$

755. Умножим обе части уравнения на $x-1$. Тогда уравнение

примет вид $x^7 - 1 = 0$ или $x^7 = 1$. Корни его: $x_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$, причем при $k = 0$ получится $x_0 = 1$ и этот корень посторонний для данного уравнения. Поэтому в найденном выражении для x_k нужно положить лишь $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

756. Корни уравнения $x^n - 1 = 0$ суть $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$, где $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ (см. задачу 751). Поэтому искомая сумма $S = 1 + \alpha^p + \alpha^{2p} + \ldots + \alpha^{(n-1)p} = 1 + \alpha^p + (\alpha^p)^2 + \ldots + (\alpha^p)^{n-1}$. Если p делится на n, то $\alpha^p = 1$ и сумма равна n. Если p не делится на n, то $\alpha^p \neq 1$ и можно воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии. Тогда для искомой суммы получим, что она равна $\frac{\alpha^{pn} - 1}{\alpha - 1} = 0$, так как $\alpha^{pn} - 1 = (\alpha^n)^p - 1 = 1 - 1 = 0$.

757. Представим уравнение в виде $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = -1 \quad (x \neq i)$. Извлекая корни, найдем

$$\frac{x+i}{x-i} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Отнимем от обеих частей равенства по 1 и после этого разделим уравнение на i. Получим

$$\frac{2}{x-i} = \sin\frac{2k+1}{n}\pi + i\left(1 - \cos\frac{2k+1}{n}\pi\right) =$$

$$= 2\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + 2i\sin^2\frac{2k+1}{2n}\pi =$$

$$= 2\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

Отсюда

$$x - i = \frac{1}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right)} =$$

$$= \frac{\cos\frac{2k+1}{2n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi} = \operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2n}\pi - i.$$

Итак,

$$x - i = \operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2n}\pi - i, \qquad x = \operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2n}\pi;$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

758. Так как

$$\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha,$$

то уравнение можно записать так:

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$$

или, извлекая корень степени n,

$$\frac{1+xi}{1-xi}=\cos\frac{2(\alpha+k\pi)}{n}+i\sin\frac{2(\alpha+k\pi)}{n}.$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства по 1, получим

$$\frac{2}{1-xi}=1+\cos\frac{2(\alpha+k\pi)}{n}+i\sin\frac{2(\alpha+k\pi)}{n}=2\cos^2\frac{\alpha+k\pi}{n}+$$

$$+2i\sin\frac{\alpha+k\pi}{n}\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}=2\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}\left(\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}+\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{\alpha+k\pi}{n}\right).$$

Отсюда

$$1-xi=\frac{1}{\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}\left(\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+k\pi}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}-i\sin\frac{\alpha+k\pi}{n}}{\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}}=1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha+k\pi}{n}.$$

Итак,

$$1-xi=1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha+k\pi}{n},\quad xi=i\operatorname{tg}\frac{\alpha+k\pi}{n},$$

$$x=\operatorname{tg}\frac{\alpha+k\pi}{n};\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

XI.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

759—774. Указание. Если какое-нибудь утверждение справедливо для единицы и если каждый раз, когда оно справедливо для какого-нибудь числа, оно справедливо и для следующего числа, то оно справедливо для любого числа.

Сформулированное предложение называется принципом математической индукции.

Метод доказательства, основанный на принципе математической индукции, называется методом математической индукции.

Применение метода математической индукции сводится: 1) к проверке высказанного утверждения для $n = 1$; 2) к предположению, что утверждение верно для $n = k$; 3) к доказательству теоремы, что из предположения справедливости утверждения для $n=k$ следует его справедливость и для $n = k + 1$.

Иногда пункт 1 рассматривают не с $n = 1$, а с какого-нибудь другого $n = m$. Например, при доказательстве свойств многогранников нам пришлось бы начинать с $n = 4$. Однако это не умаляет общности сформулированного выше, так как всегда можно положить $n = \nu + m - 1$ и рассматривать процесс доказательства, начиная с $\nu = 1$.

759. Для $n = 1$ формула справедлива, так как дает $a_1 = a_1$. Предположим, что формула верна для $n = k$, т. е.

$$a_k = a_1 + d(k - 1).$$

Тогда

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k - 1) + d = a_1 + dk.$$

Следовательно, формула

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

верна для всех n.

760. Формула $a_n = a_1 q^{n-1}$ для $n = 1$ верна. Пусть она верна для $n = k$, т. е. $a_k = a_1 q^{k-1}$. Тогда $a_{k+1} = a_k q = a_1 q^k$. Следовательно, формула $a_n = a_1 q^{n-1}$ верна для всех n.

761. Напомним, что размещениями из m элементов по n называются такие соединения, из которых каждое содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и которые, если отличаются одно от другого, то или элементами, или порядком элементов.

Пусть из элементов a_1, a_2, ..., a_m составляются различные размещения по одному. Очевидно, что таких размещений будет m. Таким образом, формула

$$A_m^n = m(m - 1) \ldots (m - n + 1) \qquad (*)$$

верна при $n = 1$.

Предположим, что формула (*) верна при $n = k$. Докажем, что тогда формула (*) будет верна и при $n = k + 1$, т. е.

$$A_m^{k+1} = m(m - 1) \ldots (m - k).$$

Для доказательства возьмем какое-нибудь размещение из m элементов по k, например a_1, a_2, ..., a_k, и будем приписывать в конце его каждый из оставшихся $(m - k)$ элементов, т. е. будем приписывать в конце взятого размещения поочередно и только по одному разу элементы a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_m. Получим $(m - k)$

размещений из m элементов по $(k+1)$. Поступая так же с каждым из размещений из m элементов по k, мы каждый раз будем получать $(m-k)$ размещений из m элементов по $(k+1)$. А так как по предположению $A_m^k = m(m-1)\ldots(m-k+1)$, то число полученных описанным выше способом размещений из m элементов по $(k+1)$ будет равно

$$A_m^k(m-k) = m(m-1)\ \ldots\ (m-k).$$

Остается выяснить, будет ли последнее выражение равно A_m^{k+1}, т. е. не будет ли среди полученных размещений одинаковых и все ли различные размещения вошли в это число?

Допустим, что среди полученных размещений есть два одинаковых. Назовем их A_1 и A_2. Так как одинаковые размещения имеют одинаковые элементы на одинаковых местах, то пусть на последнем месте A_1 и A_2 находится элемент a_l. Удалим a_l из A_1 и A_2. Получим два одинаковых размещения $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ из m элементов по k. Но это невозможно, потому что мы к каждому размещению из m элементов по k приписывали каждый из оставшихся (т. е. не вошедших в данное размещение) элементов только один раз.

Допустим, что некоторое размещение A из m элементов по $(k+1)$ нашим способом не получено. Пусть на последнем месте этого размещения находится элемент a_l, который не совпадает ни с каким другим элементом этого размещения, так как в размещение не входит один и тот же элемент больше одного раза. Удалим a_l из A. Получим размещение $\overline{A}$ из m элементов по k. Значит, чтобы получить размещение A, достаточно было в конце размещения $\overline{A}$ приписать элемент a_l, не вошедший в $\overline{A}$. Но мы брали всевозможные размещения из m элементов по k. Следовательно, брали и размещение $\overline{A}$. Мы приписывали в конце каждого такого размещения каждый из не вошедших в него элементов. Следовательно, мы приписывали в конце размещения $\overline{A}$ элемент a_l, и поэтому размещение A не может отсутствовать среди полученных.

Итак, доказано $A_m^{k+1} = m(m-1)\ldots(m-k)$, если имеет место формула $A_m^k = m(m-1)\ldots(m-k+1)$. Кроме того, ранее было доказано, что формула (*) верна при $n=1$. Следовательно, формула (*) верна при всяком n.

762. Перестановками из m элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит m этих элементов и отличается от другого порядком элементов.

Очевидно, из одного элемента можно составить только одну перестановку, т. е. $P_1 = 1$, так что формула $P_n = n!$ справедлива при $n=1$.

Предположим теперь, что формула

$$P_n = n! \qquad (*)$$

верна при $n = k$. Докажем, что она верна и при $n = k + 1$, т. е.

$$P_{k+1} = (k + 1)!$$

Для доказательства возьмем из данных $(k + 1)$ элементов a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1} какие-нибудь k элементов и составим из них перестановку. В этой перестановке поставим оставшийся $(k + 1)$-й элемент один и только один раз перед первым элементом перестановки, затем перед вторым и т. д., перед k-м элементом и после k-го. Таким образом, с помощью взятой перестановки из k элементов получим $(k + 1)$ перестановку из $(k + 1)$ элемента. Поступая так же с каждой перестановкой из k элементов, взятых из данных $(k + 1)$ элементов, мы каждый раз будем получать $(k + 1)$ перестановку из $(k + 1)$ элементов. А так как по предположению $P_k = k!$, то число полученных описанным выше способом перестановок из $(k + 1)$ элементов будет равно $k!\,(k + 1) = (k + 1)!$ Остается выяснить, будет ли полученное выражение равно P_{k+1}, т. е. не будет ли среди полученных перестановок одинаковых и все ли различные перестановки вошли в это число.

Допустим, что среди полученных перестановок есть две одинаковые. Назовем их p_1 и p_2. Так как одинаковые перестановки имеют одинаковые элементы на одинаковых местах, то некоторый элемент a_l занимает одно и то же место как в p_1, так и в p_2. Пусть, например, это будет последнее место, т. е. $(k + 1)$-е место. Удалим a_l из p_1 и p_2. Получим две одинаковые перестановки $\overline{p_1}$ и $\overline{p_2}$ по k элементов в каждой. Но это невозможно, потому что мы в каждой перестановке из k элементов ставили оставшийся $(k + 1)$-й элемент на последнее место один и только один раз. Допустим, что некоторая перестановка p из $(k + 1)$ элементов нашим способом не получена. Пусть, например, в ней элемент a_l стоит на последнем месте. Удалим a_l из p. Получим перестановку $\overline{p}$ из k элементов. Значит, чтобы получить перестановку p, нужно было взять перестановку $\overline{p}$ и в конце поставить элемент a_l. Но мы брали всевозможные перестановки из k данных элементов, в том числе и перестановку $\overline{p}$, не содержащую элемент a_l. Мы приписывали в конце каждой такой перестановки оставшийся $(k + 1)$-й элемент. Следовательно, мы приписывали в конце перестановки $\overline{p}$ элемент a_l и поэтому перестановка p не может отсутствовать среди полученных.

Итак, доказано $P_{k+1} = (k + 1)!$, если имеет место формула $P_k = k!$ Кроме того, выше было доказано, что формула (*) верна при $n = 1$. Следовательно, формула (*) верна при всяком n.

763. Сочетаниями из m элементов по n называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и отличается от другого хотя бы одним элементом.

Пусть из элементов a_1, a_2, ..., a_m составляются различные сочетания по одному. Очевидно, что таких сочетаний будет m. Таким образом, формула

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n} \qquad (*)$$

верна для $n = 1$.

Предположим, что формула (*) верна для $n = k$. Докажем, что тогда формула (*) будет верна и для $n = k + 1$, т. е.

$$C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k)}{1\cdot 2\ldots(k+1)}.$$

Для доказательства возьмем какое-нибудь сочетание из m элементов по k, например a_1, a_2, ..., a_k, и будем приписывать к нему в качестве $(k+1)$-го элемента каждый из оставшихся $(m-k)$ элементов один и только один раз. Получим $(m-k)$ сочетаний из m элементов по $(k+1)$.

Поступая так же с каждым из сочетаний из m элементов по k, мы каждый раз будем получать $(m-k)$ сочетаний из m элементов по $(k+1)$. А так как по предположению

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\cdot 2\ldots k},$$

то число полученных описанным выше способом сочетаний из m элементов по $(k+1)$ будет равно

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}(m-k).$$

Нетрудно видеть, что среди подсчитанных сочетаний есть одинаковые. Чтобы это установить, возьмем какое-нибудь сочетание c из m элементов по $(k+1)$, например a_1, a_2, a_3, ..., a_{k+1}, и удалим из него элемент a_1. Тогда получим сочетание c_1 из m элементов по k, состоящее из элементов a_2, a_3, ..., a_{k+1}, среди которых нет a_1. Затем из c удалим элемент a_2. Тогда получим сочетание c_2, состоящее из элементов a_1, a_3, ..., a_{k+1}, среди которых нет a_2. Продолжая удалять из c последовательно элементы по одному, мы, наконец, удалим из c элемент a_{k+1} и получим сочетание c_{k+1} из m элементов по k, состоящее из элементов a_1, a_2, ..., a_k, среди которых нет элемента a_{k+1}. Так как мы к каждому сочетанию из m элементов по k присоединяли каждый из оставшихся $(m-k)$ элементов, то мы присоединяли к сочетанию c_1 элемент a_1, к сочетанию c_2 элемент a_2 и т. д., наконец, к сочетанию c_{k+1} элемент a_{k+1}, получая каждый раз одно и то же сочетание c из m элементов по $(k+1)$. Отсюда следует, что каждое сочетание из m элементов по $(k+1)$ нами подсчитано $(k+1)$ раз и, следовательно, общее число их, полученное ранее, нужно разделить на $(k+1)$. Это даст

$$\frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\ \ldots\ k(k+1)}.$$

Очевидно, в полученном числе сочетаний больше не встретится одинаковых, а также не будет ни одного пропущенного. Итак, доказано, что

$$C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-k)}{1\cdot 2\ \ldots\ (k+1)},$$

если имеет место формула

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ k}.$$

Кроме того, ранее было доказано, что формула (*) верна для $n=1$. Следовательно, формула (*) верна для всех n.

764. Так как

$$(a_1+a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2,$$

то доказываемая формула верна для $n=2$. Допустим, что эта формула верна для $n=k$, т. е.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + 2S,$$

где S — сумма всевозможных попарных произведений, составленных из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, и докажем, что формула будет верна для $n=k+1$.

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1})^2 &= [(a_1+a_2+\ldots+a_k)+a_{k+1}]^2 = \\ &= (a_1+a_2+\ldots+a_k)^2 + 2(a_1+a_2+\ldots+a_k)a_{k+1} + a_{k+1}^2 = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + 2S + 2(a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \ldots + \\ &\quad + a_ka_{k+1}) + a_{k+1}^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{k+1}^2 + 2S_1,\end{aligned}$$

где S_1 — сумма всевозможных попарных произведений, составленных из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Тем самым формула для квадрата многочлена доказана для всех n.

765. Обозначим левую часть равенства S_n. Пользуемся методом математической индукции:

1) $S_1 = \frac{1^2}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$, $\frac{1(1+1)}{2\cdot(2\cdot 1+1)} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$.

При $n=1$ равенство верно.

2) Предположим, что $S_k = \frac{k(k+1)}{2\cdot(2k+1)}$.

3) Докажем, что $S_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2\cdot[2\cdot(k+1)+1]} =$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2\cdot(2k+3)}.$$

Действительно,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+3)+2(k+1)]}{2\cdot(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

766. Обозначим левую часть формулы S_n. При $n=1$ формула справедлива. Предполагая справедливость ее при $n=k-1$, докажем справедливость формулы при $n=k$.

$$S_k = S_{k-1} + k^4 = \frac{1}{30}(k-1)k(2k-1)(3k^2-3k-1) + k^4 =$$

$$= \frac{k}{30}[(k-1)(2k-1)(3k^2-3k-1) + 30k^3] =$$

$$= \frac{k}{30}[(k-1)(2k-1)(3k^2+3k-1) - 6k(k-1)(2k-1) +$$

$$+ 30k^3] = \frac{k}{30}[(k-1)(2k-1)(3k^2+3k-1) +$$

$$+ 6k(3k^2+3k-1)] = \frac{k}{30}(3k^2+3k-1)[(k-1)(2k-1) +$$

$$+ 6k] = \frac{k}{30}(3k^2+3k-1)(2k^2+3k+1) =$$

$$= \frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1).$$

767. Обозначим левую часть равенства S_n. При $n=1$ равенство верно. Предположим, что оно верно при $n=k-1$, и докажем справедливость его при $n=k$. Получим

$$S_k = S_{k-1} + k^5 = \frac{1}{12}(k-1)^2k^2[2(k-1)^2 + 2(k-1) -$$

$$- 1] + k^5 = \frac{1}{12}k^2[(k-1)^2(2k^2-2k-1) + 12k^3] =$$

$$= \frac{1}{12}k^2[(k-1)^2(2k^2+2k-1) - 4k(k-1)^2 + 12k^3] =$$

$$= \frac{1}{12}k^2[(k-1)^2(2k^2+2k-1) + 4k(2k^2+2k-1)] =$$

$$= \frac{1}{12}k^2(2k^2+2k-1)[(k-1)^2 + 4k] =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12}.$$

Тем самым равенство доказано для любого n.

768. Обозначим левую часть равенства S_n. При $n=1$ равенство справедливо. Действительно,

$$S_1 = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1-\cos x}{2\sin x} =$$

$$= \frac{2\sin^2 x + \cos x - \cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{\cos x + \cos^2 x + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} =$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) - 2\cos 2x}{2\sin x\cos x} = \frac{\cos x(1+\cos x)}{2\sin x\cos x} - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{2\sin x} - 2\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - 2\operatorname{ctg} 2x.$$

Предположим, что равенство справедливо при $n=k-1$, и докажем, что при $n=k$ оно тоже справедливо. На самом деле,

$$S_k = S_{k-1} + \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}} - 2\operatorname{ctg} 2x +$$

$$+ \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k}\left(2\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2^k}\right) - 2\operatorname{ctg} 2x.$$

Но, положив $\frac{x}{2^k} = \alpha$, получим для выражения в скобках

$$2\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha + (\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha) =$$

$$= \operatorname{ctg} 2\alpha + \frac{\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha + \frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}.$$

Итак,

$$S_k = \frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k} - 2\operatorname{ctg} 2x.$$

Равенство доказано.

769. 1. При $n=1$ неравенство справедливо, так как $\sqrt{4} < 3$.

2. Если неравенство справедливо при $n=k$, то оно справедливо и при $n=k+1$. Действительно, обозначив левую часть неравенства через S_n, будем иметь

$$S_{k+1} = \sqrt{4+S_k} < \sqrt{4+3} = \sqrt{7} < 3.$$

770. 1. При $n=2$ неравенство справедливо, так как

$$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a \quad (a^2 > 0).$$

2. Пусть неравенство справедливо при $n = k$. Покажем, что тогда неравенство справедливо и при $n = k + 1$. Действительно,

$$(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k (1 + a) > (1 + ka)(1 + a) > 1 + (k + 1)a.$$

771. Здесь имеет смысл считать лишь $n \geqslant 2$. При $n = 2$ получим квадрат. Для него $a_4 = R\sqrt{2}$, т. е. доказываемая формула справедлива. Пусть формула справедлива для $n = k$. Докажем справедливость ее для $n = k + 1$, пользуясь формулой удвоения. Получим

$$a_2{}^{k+1} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_2^{2k}}} =$$

$$= \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\left(R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{(k-2)\text{ двойки}}}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{4 - \left(2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{(k-2)\text{ двойки}}\right)}} =$$

$$= R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{(k-1)\text{ двойка}}}.$$

Формула доказана.

772. 1. При $n = 1$ утверждение справедливо, так как прямая, проведенная на плоскости, делит эту плоскость на две части. 2. Пусть утверждение справедливо при $n = k$, т. е. плоскость разделена k прямыми на $2k$ частей. Тогда $(k + 1)$-я прямая, проходящая через ту же точку, разделит надвое каждую из тех двух частей плоскости, которые заключены между двумя ранее проведенными прямыми, ближайшими к последней. Значит, плоскость будет разделена на $(2k + 2)$ части.

773. 1. При $n = 1$ утверждение справедливо. 2. Пусть при $n = k$ эта сумма $S_k = (2k - 1)^2$. Заметим, что первый член k-й строки равен k, число членов строки равно $(2k - 1)$ и последний член равен $(3k - 2)$. Строка $(k + 1)$-я получится из строки k-й, если к каждому члену k-й строки прибавить по единице и затем приписать справа два следующих по порядку числа. Поэтому получим

$$S_{k+1} = S_k + (2k - 1) + 3k + 3k + 1 = (2k - 1)^2 + 8k = (2k + 1)^2.$$

Утверждение доказано.

774. Пусть в плоскости M проведена прямая AB. Она разделит плоскость M на полуплоскости M_1 и M_2. Одну из этих полупло-

скостей можно закрасить красной краской, а другую — синей. Таким образом, при $n = 1$ утверждение доказано.

Предположим, что при $n = k$ утверждение также справедливо. Это означает, что после проведения k различных прямых на плоскости M плоскость так разбилась на области, что смежные области закрашены различными красками (красной и синей). Проведем $(k + 1)$-ю прямую, которую назовем CD. Прямая CD разделит плоскость M на полуплоскости N_1 и N_2. Перекрасим полуплоскость N_2 так, чтобы там, где до проведения CD было закрашено синей краской, после проведения CD было бы закрашено красной и, наоборот, где раньше было закрашено красной краской, теперь было бы закрашено синей. В полуплоскости N_1 сохраним прежнюю окраску. Рассмотрим теперь две произвольные смежные области P_1 и P_2. Области P_1 и P_2 могут лежать по разные стороны от CD, но могут лежать и по одну сторону от CD. В первом случае P_1 и P_2 после проведения k прямых и до проведения прямой CD составляли одну область и имели одинаковую окраску. После проведения прямой CD та часть ее (P_1 или P_2), которая оказалась в полуплоскости N_1, сохранила свою окраску, а другая часть (P_2 или P_1), оказавшаяся в N_2, изменила свою окраску. Поэтому смежные области P_1 и P_2 в первом случае окрашены разными красками. Во втором случае области P_1 и P_2 после проведения k прямых и до проведения прямой CD составляли две различные области, те же или частично те же, что и после проведения CD. Если теперь они находятся в полуплоскости N_1, где окраска сохранена прежняя, то они закрашены разными красками, потому что раньше были закрашены разными красками. Если теперь они находятся в полуплоскости N_2, где красная окраска заменена синей, а синяя — красной, то они закрашены разными красками, потому что до проведения CD они были закрашены разными, хотя и другими, красками.

Таким образом, утверждение справедливо и для $n = k + 1$. Следовательно, оно справедливо при любом n.

XII.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ.

775 — 781. Указание. Областью определения функции одного аргумента называется множество всех допустимых значений этого аргумента. Для элементарной функции, определяемой посредством математического выражения, допустимыми считаются все те вещественные значения аргумента, при которых математические опе-

рации, входящие в данное выражение, имеют смысл, а численная величина выражения является вещественным числом. При нахождении области определения элементарных функций следует помнить, что:

1) знаменатель дробного выражения не должен обращаться в нуль;

2) выражения, находящиеся под знаком корня четной степени, должны быть неотрицательными;

3) выражения, возводимые в иррациональную степень или в степень, содержащую в показателе аргументы, должны быть положительными, а при положительном показателе — неотрицательными;

4) выражения, находящиеся под знаком логарифма, должны быть положительны;

5) выражения, находящиеся под знаком арксинуса или арккосинуса, должны по абсолютной величине не превосходить единицу;

6) выражения, находящиеся под знаком тангенса или секанса, не должны равняться $\frac{2k+1}{2}\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

7) выражения, находящиеся под знаком котангенса или косеканса, не должны равняться $k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

8) основание и показатель степенно-показательного выражения u^v не должны одновременно обращаться в нуль.

775. а) $2 - x^2 \geqslant 0$, $x^2 \leqslant 2$, $|x| \leqslant \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Область есть замкнутый промежуток $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

б) $x^2 - 4 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 4$, $|x| \geqslant 2$. Область состоит из двух промежутков: $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, +\infty)$.

в) $\frac{x+1}{x+3} \geqslant 0$; $x < -3$ и $x \geqslant -1$. Область состоит из двух промежутков: $(-\infty, -3)$, $[-1, +\infty]$.

г) Решив неравенство $x(x+2)(x-3)(x-4) \geqslant 0$ (см. решение задачи 638), получим: $x \leqslant -2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, $x \geqslant 4$. Следовательно, область состоит из трех промежутков: $(-\infty, -2]$, $[0, 3]$, $[4, +\infty)$.

д) $x \geqslant 0$, $x - 1 \geqslant 0$. Отсюда $x \geqslant 1$, а область $[1, +\infty)$.

е) $x - 1 \geqslant 0$ и $x - 2\sqrt{x-1} \geqslant 0$. Но последнее неравенство равносильно такому: $(\sqrt{x-1} - 1)^2 \geqslant 0$, так что должно быть $x \geqslant 1$. Следовательно, область определения есть промежуток $[1, +\infty)$.

776. а) $2 - 2^{-x} \geqslant 0$, $2^{-x} \leqslant 2$, $-x \leqslant 1$, $x \geqslant -1$. Область есть промежуток $[-1, +\infty)$.

б) $x - 1 \neq 0$. Область состоит из двух промежутков: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

в) и г) Областью является множество всех положительных чисел.

777. а) $x^2 - 1 > 0$, $x^2 > 1$, $|x| > 1$; $x < -1$ и $x > 1$. Областью являются два промежутка: $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$.

б) $x+1>0$, $x-1>0$; $x>1$. Область $(1, +\infty)$.

в) $x^2-3x+2>0$, $(x-1)(x-2)>0$; $x<1$ и $x>2$. Область состоит из двух промежутков: $(-\infty, 1)$ и $(2, +\infty)$.

г) $\log_3(x-1)\geqslant 0$. Отсюда $x-1\geqslant 1$, а $x\geqslant 2$. Областью является промежуток $[2, +\infty)$.

778. а) Все неотрицательные числа, т. е. промежуток $[0, +\infty)$.

б) Все вещественные числа, т. е. промежуток $(-\infty, +\infty)$.

779. а) $\sin x\neq 0$; $x\neq k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Таким образом, область есть множество всех вещественных чисел, за исключением чисел вида $k\pi$. Иначе: область есть множество всех промежутков вида $(k\pi, (k+1)\pi)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

б) $\sin 4x\geqslant 0$, $2k\pi\leqslant 4x\leqslant(2k+1)\pi$, $\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{2k+1}{4}\pi$. Область состоит из множества всех промежутков вида $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{2k+1}{4}\pi\right)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

в) Множество всех вещественных чисел, исключая $x=0$.

г) Должно быть $\operatorname{tg}^2 x-(\sqrt{3}+1)\operatorname{tg}x+\sqrt{3}\geqslant 0$ или $(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})\geqslant 0$. Решение последнего неравенства сводится к решению следующих двух неравенств: $\operatorname{tg}x\leqslant 1$ и $\operatorname{tg}x\geqslant\sqrt{3}$. Из них находим, что

$$k\pi-\frac{\pi}{2}<x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4} \text{ и } k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

Итак, область состоит из множества всех интервалов вида

$$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{4}\right] \text{ и вида } \left[k\pi+\frac{\pi}{3}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right),$$

где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

780. а) Должно быть $\log_a\sin x\geqslant 0$. Если $a>1$, то это равносильно требованию $\sin x\geqslant 1$. Но $\sin x$ не может быть больше единицы, а равен единице он будет при $x=\frac{4k+1}{2}\pi$. Таким образом, областью в этом случае будет множество всех чисел вида $\frac{4k+1}{2}\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Если же $0<a<1$, то это равносильно требованию $0<\sin x\leqslant 1$ или $\sin x>0$. В этом случае областью будет множество всех промежутков вида $(2k\pi, 2k\pi+2\pi)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

б) Должно быть $\lg\operatorname{tg}x>0$. Так как здесь основание больше единицы, то последнее неравенство равносильно такому: $\operatorname{tg}x>1$. Отсюда $k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$. Следовательно, область состоит

из множества всех промежутков вида $\left(k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

в) Так как $|\sin x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}\leqslant 1{,}5$ (см. решение задачи 697), то областью является множество всех вещественных чисел.

781. а) Должно быть $\left|\frac{3}{x}\right|\leqslant 1$. Отсюда $|x|\geqslant 3$ или $x\leqslant -3$ и $x\geqslant 3$. Область состоит из промежутков $(-\infty,\ -3]$ и $[3,\ +\infty)$.

б) Должно быть $\frac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$. Но это неравенство тождественное, так как $2|x|\leqslant 1+x^2$, $1+x^2-2|x|\geqslant 0$, $(1-|x|)^2\geqslant 0$. Поэтому областью является множество всех вещественных чисел.

в) Должно быть $-1\leqslant \arcsin x\leqslant 1$. Область $[-\sin 1,\ \sin 1]$.

782. а) Период $\omega=\frac{2\pi}{3}$, так как

$$y=\sin 3x=\sin(3x+2\pi)=\sin 3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right).$$

б) $\omega=8\pi$, так как $\cos\frac{x+8\pi}{4}=\cos\left(\frac{x}{4}+2\pi\right)=\cos\frac{x}{4}$.

в) Период первого слагаемого равен $\frac{\pi}{3}$, а второго $\frac{\pi}{2}$. Период суммы должен содержать целое число раз как $\frac{\pi}{3}$, так и $\frac{\pi}{2}$. Такое наименьшее число есть π, которое и является периодом.

г) Рассуждая так же, как в пункте «в», убедимся, что 12π — период функции.

д) Так как $y=\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{8}\sin 2x$, то период функции равен 2π.

783. а) Период функции равен $\frac{2\pi}{2\pi}=1$.

б) Период $\sin\sqrt{2}x$ есть $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, а период $\cos\sqrt{3}x$ есть $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Если бы функция $\sin\sqrt{2}x+\cos\sqrt{3}x$ была периодической, то ее период $\omega\neq 0$, как нетрудно видеть, должен бы при делении на $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ дать целое число и точно так же при делении на $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Это значит, что должно быть $\omega=\frac{2k\pi}{\sqrt{2}}$ и $\omega=\frac{2l\pi}{\sqrt{3}}$, где k и l — какие-то целые числа. Но тогда $\frac{2k\pi}{\sqrt{2}}=\frac{2l\pi}{\sqrt{3}}$ или $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{l}{k}$, что

невозможно, так как в левой части равенства находится иррациональное число, а в правой — рациональное. Таким образом, рассматриваемая функция непериодическая.

784—812. Указание. При построении графика функции нужно изучить свойства функции, исследовать функцию. Построение графика функции «по точкам», без учета ее свойств и особенностей, может привести к грубым ошибкам. Для построения графика нужно прежде всего найти область определения функции. Затем полезно выяснить, не симметрична ли линия относительно оси OY или начала координат, найти, по возможности, ее наибольшее и наименьшее значения, выяснить значения функции на границах области определения. После этого можно взять несколько точек для уточнения линии, в частности точки пересечения линии с осями координат. Если функция периодическая, то при построении можно ограничиться любым промежутком $a \leqslant x < b$, взятым из области определения функции, если $b - a = \omega$, где ω — период функции. Полезно также помнить, что если функция $y = f(x)$ — четная, т. е. $f(-x) = f(x)$, то ее график есть линия, симметричная относительно оси ординат; если функция $y = f(x)$ — нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то ее график есть линия, симметричная относительно начала координат.

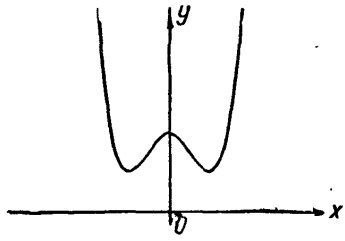


Рис. 20

784. Область определения — множество всех вещественных чисел. Линия симметрична относительно оси ординат, так как

$$(-x)^4 - 2(-x)^2 + 2 = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Поэтому достаточно рассмотреть лишь $x \geqslant 0$. Выделяя полный квадрат, получим $y = (x^2 - 1)^2 + 1$. Если $x = 1$, то $y = 1$. Это — наименьшее значение функции. Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$. Если $x = 0$, то $y = 2$. Это точка пересечения линии с осью OY. С осью OX она не пересекается, так как $y = (x^2 - 1)^2 + 1 > 0$. Взяв еще дополнительно точки для $x = \frac{1}{2}$ и для $x = 2$, получим такую таблицу для $x \geqslant 0$ (рис. 20):

x	0	0,5	1	2	$\to +\infty$
y	2	$\sim 1{,}5$	1	10	$\to +\infty$

785. Область определения — множество всех вещественных чисел. Но с увеличением x на 2 и k увеличивается на 2, а поэтому значе-

ние функции не меняется. Значит, функция периодическая с периодом 2. Поэтому достаточно построить график функции в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, что соответствует $k = 0$. Для этого случая $y = x^2$ (рис. 21).

786. Так как $|x| = x$ для $x \geqslant 0$ и $|x| = -x$ для $x \leqslant 0$, то $y = x$ для $x \geqslant 0$ и $y = -x$ для $x \leqslant 0$. График функции состоит из двух полупрямых, являющихся биссектрисами первого и второго координатных углов (рис. 22).

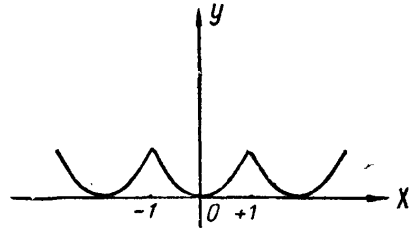


Рис. 21

787. Так как $|x + 2| = x + 2$, если $x \geqslant -2$, и $|x + 2| = -(x + 2)$, если $x \leqslant -2$, то функцию можно записать так: $y = x + 2$ для $x \geqslant -2$ и $y = -x - 2$ для $x \leqslant -2$. Функциям же $y = x + 2$ и $y = -x - 2$ соответствуют прямые линии, из которых первая проходит через точки $(-2, 0)$ и $(0, 2)$, а вторая — через точки $(-2, 0)$ и $(0, -2)$. Поэтому искомый график состоит из двух полупрямых, определяемых написанными выше уравнениями. Эти полупрямые выходят из точки $(-2, 0)$ и расположены от оси абсцисс со стороны положительных ординат (рис. 23).

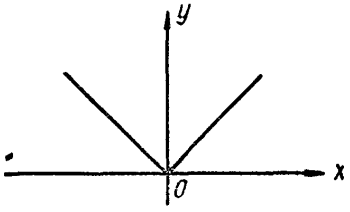


Рис. 22

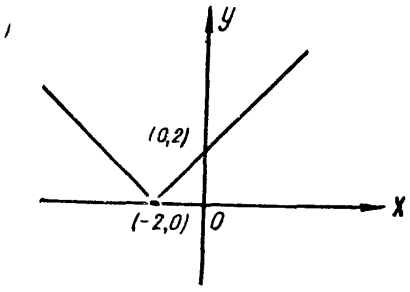


Рис. 23

788. а) Если $x \leqslant 1$, то $|x - 1| = 1 - x$, $|x - 2| = 2 - x$, $y = -2x + 3$. Этому уравнению соответствует прямая, проходящая через точки (0, 3) и (1, 1), а при условии $x \leqslant 1$ ему соответствует полупрямая, выходящая из точки (1, 1) и расположенная от оси абсцисс со стороны положительных ординат.

б) Если $1 \leqslant x \leqslant 2$, то $|x - 1| = x - 1$, $|x - 2| = 2 - x$, $y = 1$. Этому уравнению соответствует прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку (1, 1), а при условии $1 \leqslant x \leqslant 2$ ему соответствует отрезок этой прямой, заключенный между точками (1, 1) и (2, 1).

в) Если $x \geqslant 2$, то $|x - 1| = x - 1$, $|x - 2| = x - 2$, $y = 2x - 3$. Этому уравнению соответствует прямая, проходящая через точки

(2, 1) и (0, —3), а при условии $x \geqslant 2$ ему соответствует полупрямая, выходящая из точки (2, 1) и расположенная от оси абсцисс со стороны положительных ординат. График функции изображен на рис. 24.

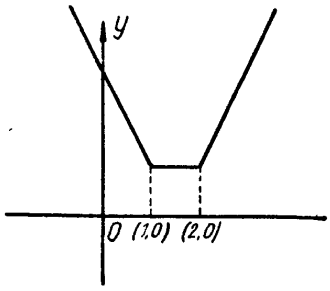


Рис. 24

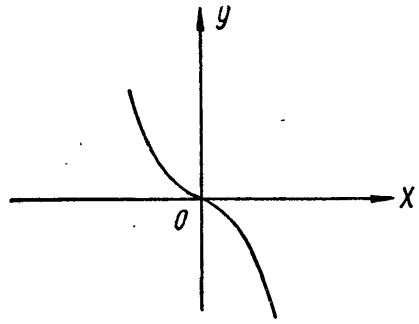


Рис. 25

789. $y = -x|x| = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \geqslant 0; \\ x^2, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$

График функции состоит из части параболы $y = x^2$, соответствующей $x \leqslant 0$, и части параболы $y = -x^2$, соответствующей $x \geqslant 0$ (рис. 25).

790. Если $x^2 \geqslant 1$, т. е. $|x| \geqslant 1$, то $y = |x^2 - 1| = x^2 - 1$. Уравнению $y = x^2 - 1$ соответствует парабола, проходящая через точки (— 1, 0), (0, — 1), (1, 0), а при условии $|x| \geqslant 1$ ему соответствуют ветви этой параболы, выходящие из точек (— 1, 0) и (1, 0). Если $x^2 \leqslant 1$, т. е. $|x| \leqslant 1$, то $y = |x^2 - 1| = 1 - x^2$. Уравнению $y = -x^2 + 1$ соответствует парабола, проходящая через точки (— 1, 0), (0, 1), (1, 0), а при условии $|x| \leqslant 1$ ему соответствует отрезок дуги этой параболы, ограниченный точками (— 1, 0) и (1, 0). График функции изображен на рис. 26.

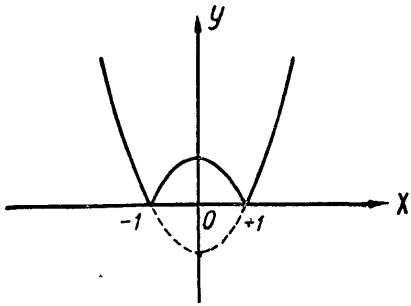


Рис. 26

791. График функции получится из графика параболы

$$y = x^2 - 3x + 2,$$

если часть ее, находящуюся под осью абсцисс (где $y < 0$), заменить симметричной ей линией относительно оси абсцисс (рис. 27).

792. Область определения $(-\infty, +\infty)$. Кривая симметрична относительно оси ординат и вся расположена над осью абсцисс.

При $x = 0$ функция принимает наибольшее значение $y = 1$. При $x > 1$ функция убывает *, и если $x \to +\infty$, то $y \to 0$ (рис. 28).

793. Область определения $(-\infty, +\infty)$. Кривая симметрична относительно начала координат. Так как

$$y = \frac{x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2-2x+2x} = \frac{x}{(x-1)^2+2x} = \frac{1}{\frac{(x-1)^2}{x}+2},$$

то отсюда видно, что при $x = 1$ функция имеет наибольшее значение $y = \frac{1}{2}$.

При $x=0$ и $y=0$. Если $0 < x < 1$, то функция возрастает; если $x > 1$, то функция убывает. Когда $x \to +\infty$, то $y = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0$ (рис. 29).

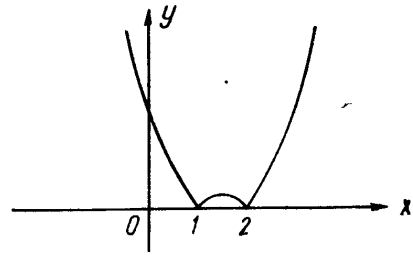


Рис. 27

794. Функция $y = \log_2(-x)$ определена для $x < 0$. Ее значение при $x = -a$ $(a > 0)$ совпадает со значением функции $y = \log_2 x$ при $x = a$. Следовательно, графики функций $y = \log_2(-x)$ и $y = \log_2 x$ симметричны относительно оси ординат. Но график функции $y = \log_2 x$ общеизвестен, поэтому график данной функции будет иметь вид, изображенный на рис. 30.

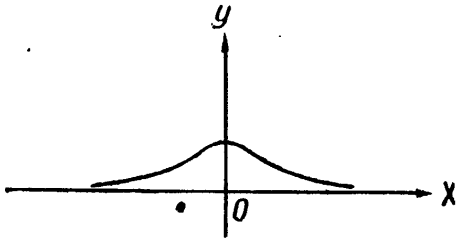


Рис. 28

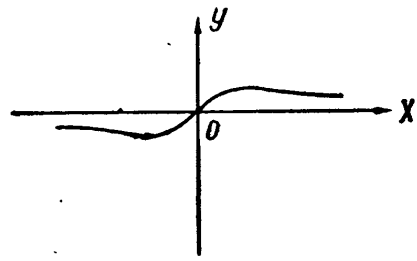


Рис. 29

795. Область определения — множество всех вещественных чисел, за исключением нуля. Кривая симметрична относительно оси ординат, так как $\log_2|-x| = \log_2|x|$. Но при $x > 0$ $y = \log_2|x| = \log_2 x$, и отсюда ясно, что график данной функции будет состоять

* Функция $f(x)$ называется убывающей (возрастающей) в некоторой области, если она определена в этой области и если для любой пары x_1 и x_2 принадлежащих ей значений из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$ $[f(x_1) < f(x_2)]$.

из графика функции $y = \log_2 x$ и симметричной ему линии относительно оси ординат (рис. 31).

796. График данной функции будет в промежутке $[1, +\infty)$ совпадать с графиком функции $y = \log_2 x$, а в промежутке $(0, 1]$ являться зеркальным отображением функции $y = \log_2 x$ в оси абсцисс (рис. 32).

797. Область определения функции есть промежуток $(-\infty, +\infty)$, но для построения достаточно рассмотреть промежуток $[0, \pi]$, потому что $y = 2\sin 2x$ имеет период $\omega = \pi$. При $x = \frac{\pi}{4}$ функция имеет

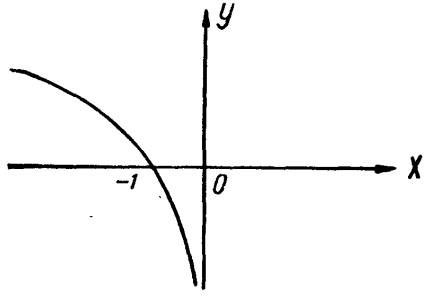


Рис. 30

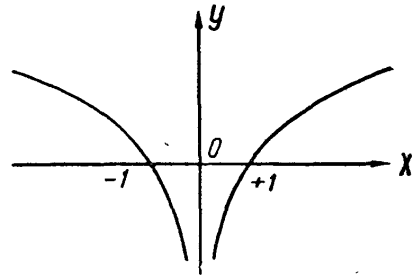


Рис. 31

наибольшее значение $y = 2$, а при $x = \frac{3}{4}\pi$ — наименьшее значение $y = -2$. Если $y = 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$. В промежутке $0 < x < \frac{\pi}{4}$ функция возрастает, в промежутке $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ — убывает, в промежутке $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$ — снова возрастает (рис. 33).

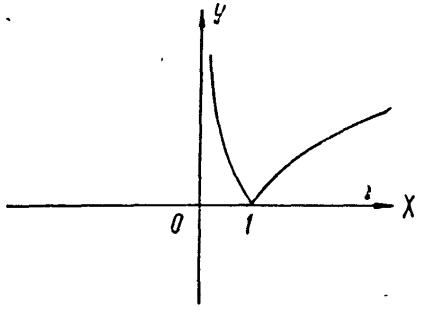


Рис. 32

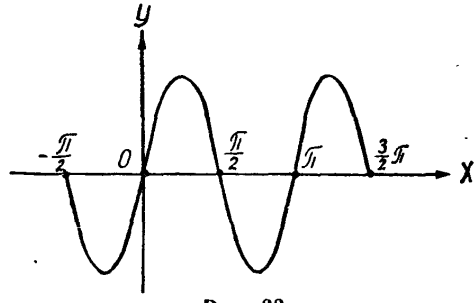


Рис. 33

798. Функция имеет период $\omega = 4\pi$, поэтому достаточно ее исследовать в промежутке $[0, 4\pi]$. Это исследование проводится аналогично исследованию, проведенному в задаче 797. График функции изображен на рис. 34.

799. Период функции $\omega = \frac{\pi}{2}$. Функция приводится к виду

$$y = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right).$$

Исследование ее в промежутке $\left[-\frac{\pi}{16}, \frac{7}{16}\pi\right]$ сходно с исследованием функции в задаче 797. График функции см. на рис. 35.

800. График симметричен относительно оси ординат. При $x \geqslant 0$ график данной функции и график функции $y = \sin x$ совпадают (рис. 36).

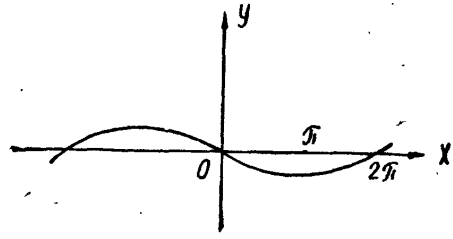


Рис. 34

801. Для всех x, для которых $\sin x \geqslant 0$, график данной функции и график функции $y = \sin x$ совпадают. Для всех x, для которых $\sin x \leqslant 0$, график данной функции и график функции $y = \sin x$ симметричны относительно оси абсцисс (рис. 37).

802. График получится суммированием ординат графиков функций $y = x$ и $y = \sin x$, соответствующих одному и тому же значению абсциссы. Кривая симметрична относительно начала координат, так как

$$(-x) + \sin(-x) = -(x + \sin x).$$

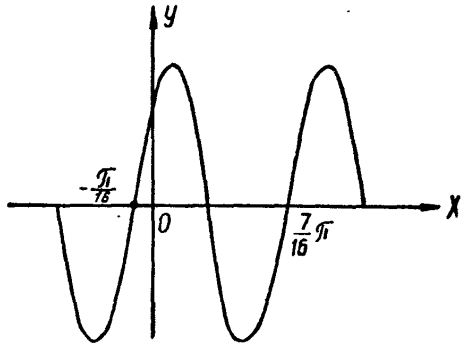


Рис. 35

График функции дан на рис. 38.

803. Область определения $(-\infty, +\infty)$. Но данная функция периодическая с периодом 2π. Поэтому достаточно построить график ее в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. Если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то

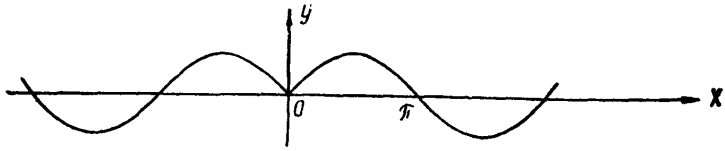


Рис. 36

$y = \arcsin(\sin x) = x$, а если $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$, то $y = \arcsin(\sin x) = \pi - x$ (см. задачу 544). Отсюда видим, что график данной функ-

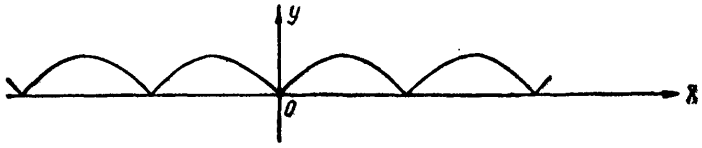


Рис. 37

ции в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ состоит из двух отрезков прямых (рис. 39).

804. Область определения функции — множество всех вещественных чисел, но так как она имеет период $\omega = 2\pi$, то будем ее исследовать в промежутке $[0, 2\pi]$. Если

$0 \leqslant x \leqslant \pi$, то $y = \arccos(\cos x) = x$; если же $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, то

$$y = \arccos(\cos x) = \arccos[\cos(2\pi - x)] = 2\pi - x,$$

так как $0 \leqslant 2\pi - x \leqslant \pi$. Отсюда видим, что график данной функции в промежутке $[0, 2\pi]$ состоит из двух отрезков прямых (рис. 40).

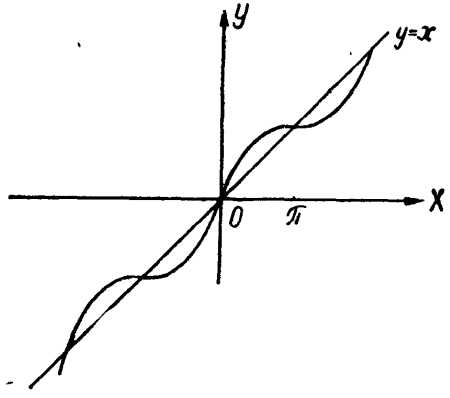


Рис. 38

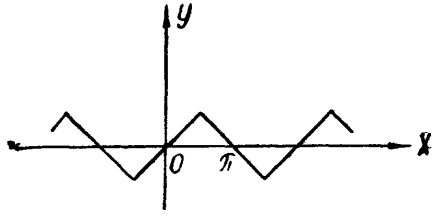


Рис. 39

805. Равенство $y = \operatorname{Arc}\cos(\cos x)$ равносильно равенству $\cos y = \cos x$. Но тогда получим $y = 2k\pi \pm x$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Отсюда видим, что $y = \operatorname{Arc}\cos(\cos x)$ — функция бесконечнозначная. График функции состоит из двух семейств параллельных прямых. Одни из них образуют с осью абсцисс углы 45°, а другие 135°. Расстояние между прямыми каждого семейства равно $\pi\sqrt{2}$ (рис. 41).

806. Область определения — множество всех вещественных чисел, за исключением чисел вида $\frac{2k+1}{2}\pi$, где k — любое целое

число. Так как данная функция периодическая с периодом $\omega = \pi$, то достаточно исследовать функцию в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Если $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x.$$

Поэтому график данной функции в рассматриваемом интервале состоит из отрезка прямой, ограниченного точками $(-1, -1)$ и $(1, 1)$ (рис. 42).

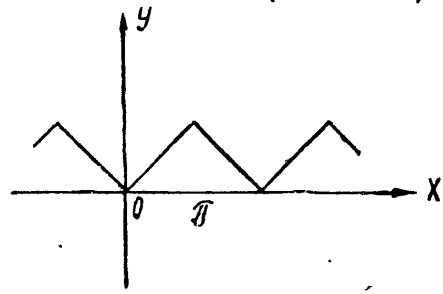


Рис. 40

807. Область определения функции есть множество всех вещественных чисел. Преобразуем выражение, определяющее функцию. Пусть $k \leqslant x < k + 1$, где k — целое число. При $x = k$ и $y = k$. Пусть теперь $x = k + \alpha$, где $0 < \alpha < 1$. Получим

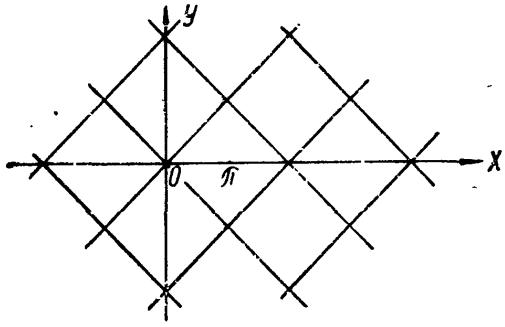


Рис. 41

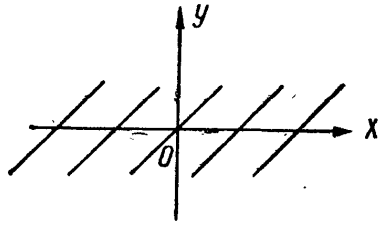


Рис. 42

$$y = \frac{2(k+\alpha)-1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\frac{2(k+\alpha)-1}{2}\pi\right] =$$

$$= k + \frac{2\alpha-1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\alpha-1}{2}\pi\right) = k + \frac{2\alpha-1}{2} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\alpha-1}{2}\pi = k + \frac{2\alpha-1}{2} - \frac{2\alpha-1}{2} = k,$$

так как $-\frac{\pi}{2} < \frac{2\alpha-1}{2}\pi < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\alpha-1}{2}\pi\right) = \frac{2\alpha-1}{2}\pi \text{ (см. задачу 545).}$$

Итак, если $k \leqslant x < k+1$, то $y = k$. Очевидно, для $k+1 \leqslant x < k+2$ функция $y = k+1$. Отсюда видим, что график данной функции в промежутке $k \leqslant x < k+1$ представляет собой отрезок прямой, параллельной оси абсцисс и отсекающей на оси ординат направленный отрезок, равный k. Правые концы этих отрезков не принадлежат графику (рис. 43).

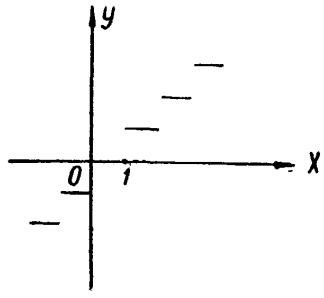


Рис. 43

808. Область определения функции определится из системы неравенств: $1 - x \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Это даст $0 \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, областью является промежуток $[0, 1]$. Преобразуем данное выражение. Возьмем синус от обеих частей данного равенства. Получим

$$\sin y = \sin(\arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}) =$$

$$= \sin(\arcsin\sqrt{1-x})\cos(\arcsin\sqrt{x}) +$$

$$+ \cos(\arcsin\sqrt{1-x})\sin(\arcsin\sqrt{x}) =$$

$$= \sqrt{1-x}\sqrt{1-x} + \sqrt{x}\sqrt{x} = 1 - x + x = 1.$$

Но так как

$$\sqrt{x} \geqslant 0 \text{ и } \sqrt{1-x} \geqslant 0, \text{ то } 0 \leqslant \arcsin\sqrt{1-x} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant \arcsin\sqrt{x} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

и $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Поэтому из равенства $\sin y = 1$ следует $y = \frac{\pi}{2}$. Этот же результат можно было бы получить и на основании задачи 560. Таким образом, графиком данной функции является отрезок прямой, ограниченный точками $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 44).

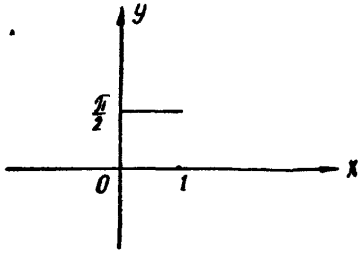


Рис. 44

809. Область определения — множество всех вещественных чисел, за исключением нуля. Преобразуем выражение, находящееся в правой части равенства, пользуясь формулами задач 568, 539 и 569. Если $x > 0$, то

$$y = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Если $x < 0$, то

$$y = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Итак, графиком данной функции будет для $x > 0$ положительная полуось OX, а для $x < 0$ полупрямая, параллельная оси OX, и отсекающая на оси OY отрезок величиною $-\pi$, считая от начала координат (рис. 45).

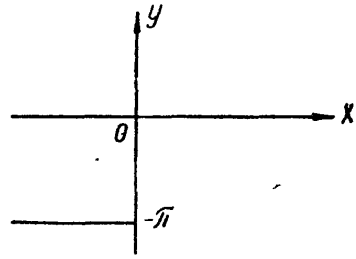


Рис. 45

810. Область определения — множество всех вещественных чисел, за исключением -1. Преобразуем данное равенство. Возьмем тангенс от обеих частей равенства. Получим

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x}\right)} = \frac{x + \dfrac{1-x}{1+x}}{1 - x\cdot\dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{x^2+1}{1+x^2} = 1.$$

Следовательно, $y = k\pi + \frac{\pi}{4}$. При этом, так как $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x} < \frac{\pi}{2}$ и $-\pi < \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x} < \pi$, k может равняться только 0 или -1. Итак, получаем, что $y = \frac{\pi}{4}$ или $y = -\frac{3}{4}\pi$. Если $1 + x < 0$, то, очевидно, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < 0$; $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x} < 0$ и $-\pi < y < 0$. Ясно, что в этом случае $y = -\frac{3}{4}\pi$. Если $1 + x > 0$, то, как легко выяснить, $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$ будут в интервале $0 < x < 1$ положительны и, следовательно, их сумма может быть только положительным числом, а в интервалах $-1 < x < 0$ и $1 < x < +\infty$ они разных знаков,

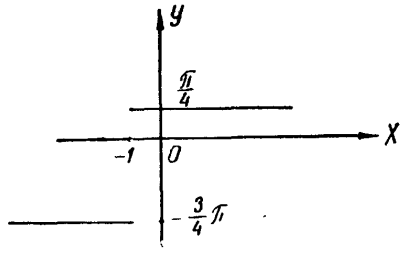


Рис. 46

и поэтому их сумма будет находиться между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Отсюда заключаем, что $y=\frac{\pi}{4}$, если $x>-1$, и $y=-\frac{3}{4}\pi$, если $x<-1$. График функции состоит из двух полупрямых, параллельных оси OX, из которых одна выходит из точки $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$ и идет в сторону положительных абсцисс, а вторая выходит из точки $\left(-1, -\frac{3}{4}\pi\right)$ и идет в сторону отрицательных абсцисс. Сами точки $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(-1, -\frac{3}{4}\pi\right)$ графику не принадлежат (рис. 46).

811. Область определения — множество всех вещественных чисел, так как $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$ при всех x. График функции симметричен относительно оси OY. Поэтому рассматриваем только $x \geqslant 0$. Из данного равенства получаем

$$\cos y = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Эта формула напоминает формулу, выражающую косинус угла через тангенс половинного угла. Естественно поэтому вычислить $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$. Находим, что

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} = \sqrt{x^2} = x,$$

причем перед радикалом взят знак плюс, потому что $0 \leqslant y < \pi$, $0 \leqslant \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{y}{2} \geqslant 0$. Из равенства $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = x$ получаем $\frac{y}{2} = \operatorname{arc\,tg} x$ или $y = 2\operatorname{arc\,tg} x$. Значит, график данной функции для $x \geqslant 0$ получится из известного графика функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$ удвоением ординат последнего (рис. 47).

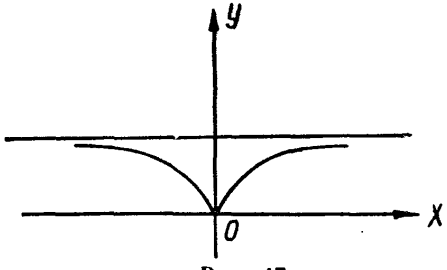


Рис. 47

812. Область определения функции — промежуток $[-1, 1]$. Положим $\arccos(2x^2-1) = z$. Получим $\cos z = 2x^2 - 1$, причем $0 \leqslant z \leqslant \pi$. Равенство $\cos z = 2x^2 - 1$ напоминает формулу, выражающую косинус угла через косинус половинного угла. Естественно поэтому вычислить $\cos\frac{z}{2}$. Находим

$$\cos\frac{z}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}} = \sqrt{\frac{1+2x^2-1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Следовательно,

$$z = 2\arccos x, \text{ если } x \geqslant 0, \text{ и } z = 2\arccos(-x),$$

если $x \leqslant 0$. Таким образом, если

$x \geqslant 0$, то $y = 2\arccos x + 2\arcsin x = \pi$; если $x \leqslant 0$, то

$$y = 2\arccos(-x) + 2\arcsin x = 2\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(-x)\right] + 2\arcsin x =$$

$$= \pi + 2\arcsin x + 2\arcsin x = \pi + 4\arcsin x.$$

График функции для $x \geqslant 0$ есть полупрямая, параллельная оси абсцисс, которая выходит из точки $(0, \pi)$ и идет в сторону положительных абсцисс. График функции для $x \leqslant 0$ получится из графика функции $y = \arcsin x$, если его ординаты увеличить в четыре раза и затем так полученную кривую поднять на величину π, т. е. все ординаты увеличить на π (рис. 48).

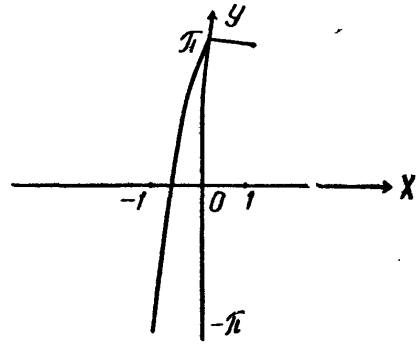


Рис. 48

813. Если $f(x) > 0$ для всей области определения, то график функции $y = |f(x)|$ везде совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Если же в некоторых интервалах $f(x) < 0$, то график функции $y = |f(x)|$ в этих интервалах симметричен с графиком функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс, а в прочих частях совпадает с ним (см., например, задачи 786, 787, 790, 791, 796, 801).

814. График функции $y = f(|x|)$ симметричен относительно оси ординат, причем для $x > 0$ он совпадает с графиком функции $y = f(x)$ (см., например, задачи 786, 795, 800). Если функция $y = f(x)$ определена только для $x < 0$ (например, $f(x) = \sqrt{-x}$), то выражение $f(|x|)$ не имеет смысла.

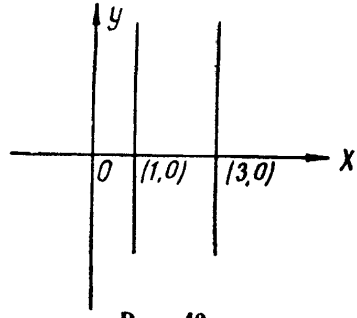


Рис. 49

815. Уравнение $xy = 0$ распадается на два уравнения: $x = 0$ и $y = 0$. Первому соответствует ось ординат, потому что только точки, расположенные на оси ординат, имеют абсциссы, равные нулю. Точно так же убедимся, что второму уравнению соответствует ось абсцисс. Поэтому уравнению $xy = 0$ на плоскости соответствуют все точки, расположенные на осях координат.

816. Если $x \geqslant 2$, то $|x-2| = x-2 = 1$. Отсюда $x = 3$. Если $x < 2$, то $|x-2| = 2-x = 1$. Отсюда $x = 1$. Уравнению $x = 3$ на плоскости соответствует прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку (3, 0). Уравнению $x = 1$ на плоскости соответствует прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку (1, 0). Следовательно, уравнению $|x-2| = 1$ на плоскости соответствуют все точки, расположенные на прямых $x = 3$ и $x = 1$ (рис. 49).

817. Уравнение $x^2 = y^2$ распадается на два независимых уравнения: $y = x$ и $y = -x$. Первому соответствует биссектриса первого и третьего координатных углов, а второму — биссектриса второго и четвертого. Поэтому уравнению $x^2 = y^2$ на плоскости соответствуют все точки, расположенные на биссектрисах четырех координатных углов (рис. 50).

818. а). Если $x \geqslant 0$, $2y-1 \geqslant 0$, то $2y+1 > 0$ $|x| = x$, $|2y-1| = 2y-1$, $|2y+1| = 2y+1$ и уравнение принимает вид

$$2y - 1 + 2y + 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}x = 4 \text{ или } y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1.$$

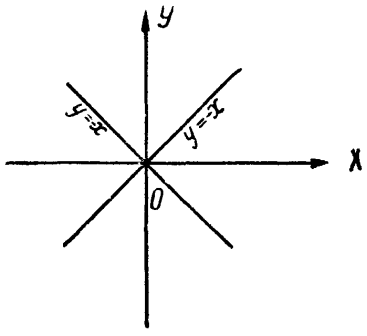


Рис. 50

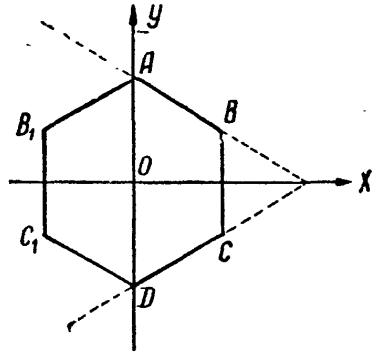


Рис. 51

Этому уравнению соответствует прямая, проходящая через точку A (0, 1) и наклоненная к оси абсцисс под углом 150° (рис. 51). Но так как $x \geqslant 0$ и $y \geqslant \frac{1}{2}$, то точки расположатся на отрезке этой прямой, ограниченной точками $A(0, 1)$ и $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

б) Если $x \geqslant 0$, $2y+1 \leqslant 0$, то $2y-1 < 0$, $|x| = x$, $|2y-1| = 1-2y$, $|2y+1| = -1-2y$ и уравнение примет вид

$$1 - 2y - 1 - 2y + \frac{4}{\sqrt{3}}x = 4 \text{ или } y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 1.$$

Этому уравнению соответствует прямая, проходящая через точку D (0, — 1) и наклоненная к оси абсцисс под углом 30°. Но так как

$x \geqslant 0$ и $y \leqslant -\frac{1}{2}$, то точки расположатся на отрезке этой прямой, ограниченной точками $D(0, -1)$ и $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

в) Если $x \geqslant 0$, $2y - 1 \leqslant 0$, $2y + 1 \geqslant 0$, то $|x| = x$, $|2y - 1| = 1 - 2y$, $|2y + 1| = 2y + 1$ и уравнение примет вид

$$1 - 2y + 2y + 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} x = 4 \text{ или } x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Этому уравнению соответствует прямая, параллельная оси ординат и отстоящая от нее на расстояние $\frac{\sqrt{3}}{2}$, считая от начала координат в сторону положительных абсцисс. Но так как $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$, то точки лежат на отрезке этой прямой, ограниченной точками $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Итак, при $x \geqslant 0$ точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, заполняют контур $ABCD$. Так как подстановка в это уравнение $-x$ вместо x не меняет вида уравнения, то отсюда можно сделать вывод, что и слева от оси координат есть точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, и что они заполняют контур AB_1C_1D, симметричный с $ABCD$ относительно оси ординат. В целом получится контур правильного шестиугольника (рис. 51).

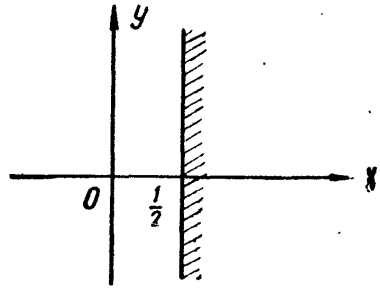


Рис. 52

819. Так как уравнению $x = \frac{1}{2}$ соответствует прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, то точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $x > \frac{1}{2}$, заполнят полуплоскость, расположенную правее этой прямой, исключая граничные точки, т. е. точки самой прямой (рис. 52).

820. Так как в этом случае выполняется соотношение $-3 < x < 3$, то точки, удовлетворяющие своими координатами данному неравенству, расположены в полосе, ограниченной прямыми $x = 3$ и $x = -3$, но исключая точки самих прямых. Эти прямые параллельны оси ординат и отстоят от нее на расстояния, равные 3 (рис. 53).

821. Точки расположены выше прямой, уравнение которой $x+y+1=0$ (рис. 54).

822. Выше прямой $y-x-3=0$ и одновременно ниже прямой $y-2x+1=0$ (рис. 55).

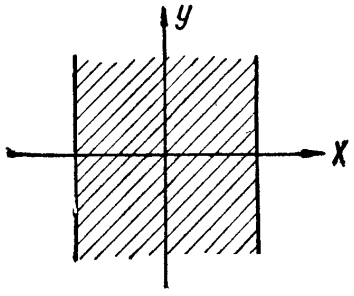


Рис. 53

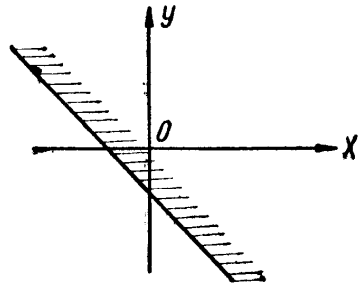


Рис. 54

823. Выше прямых $2x+y-2=0$ (I) и $x-y=0$ (II) и ниже прямой $2y-x-2=0$ (III) одновременно (рис. 56).

824. Данное неравенство равносильно следующим: $-1\leqslant x+y\leqslant 1$ (см. задачу 660). Следовательно, точки находятся в полосе между прямыми $x+y-1=0$ и $x+y+1=0$ и на ее границах (рис. 57).

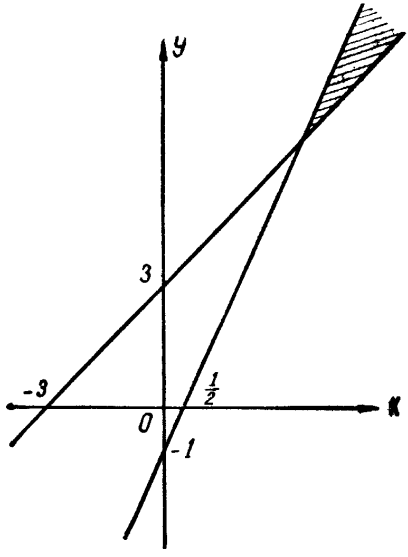


Рис. 55

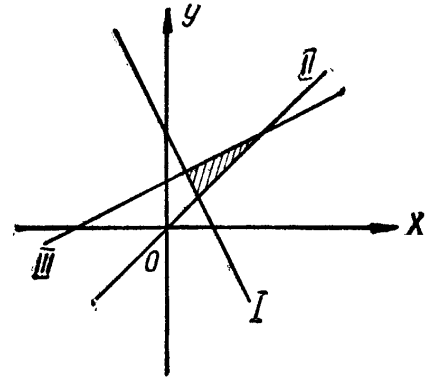


Рис. 56

825. Если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то получим $0\leqslant x+y\leqslant 1$. В этом случае точки находятся в прямоугольном треугольнике, отсеченном от первого квадранта прямой $x+y=1$ (рис. 58) и на его контуре. Случаи $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$; $x\geqslant 0$, $y\leqslant 0$; $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$ дадут соответст-

венно: $-1 \leqslant x+y \leqslant 0$, $0 \leqslant x-y \leqslant 1$, $-1 \leqslant x-y \leqslant 0$. Очевидно, точки, соответствующие всем этим четырем случаям, расположатся внутри квадрата, образованного прямыми $x+y=1$, $x+y=-1$, $x-y=-1$, $x-y=1$ и на его контуре.

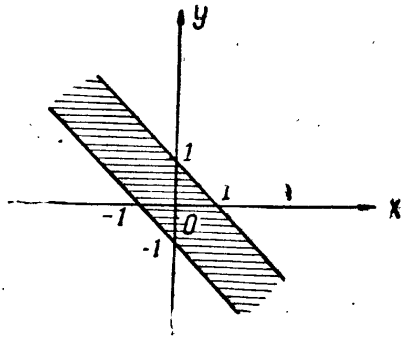


Рис. 57

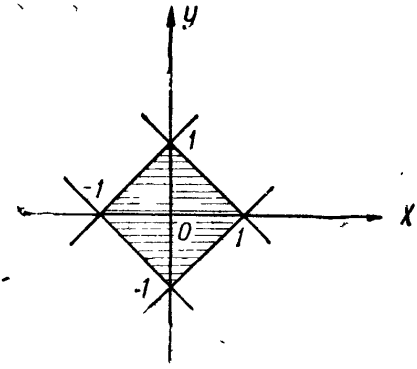


Рис. 58

826. Данное неравенство равносильно следующим: $-1 < |x+1| - |y-1| < 1$ (см. задачу 660).

а) Если $x+1 \geqslant 0$; $y-1 \geqslant 0$, то $-1 < x-y+2 < 1$. Следовательно, в этом случае точки расположены выше прямой $y=1$ (I), выше прямой $x-y+1=0$ (II), ниже прямой $x-y+3=0$ (III) и правее прямой $x=-1$ (IV). На рис. 59 эта область отмечена горизонтальной штриховкой.

б) Если $x+1 \geqslant 0$, $y-1 \leqslant 0$, то $-1 < x+y < 1$. Следовательно, соответствующие точки расположены ниже прямой $y=1$ (I), ниже прямой $x+y-1=0$ (V), выше прямой $x+y+1=0$ (VI) и правее $x=-1$ (IV). На рис. 59 эта область отмечена вертикальной штриховкой.

в) Случай $x+1 \leqslant 0$, $y-1 \geqslant 0$ приведет к неравенствам $-1 < x+y < 1$, а случай $x+1 \leqslant 0$, $y-1 \leqslant 0$ — к неравенствам $-1 < x-y+2 < 1$. Очевидно, соответствующие этим двум случаям точки расположатся в области, симметричной заштрихованной горизонтально и вертикально относительно прямой $x=-1$ (косая штриховка).

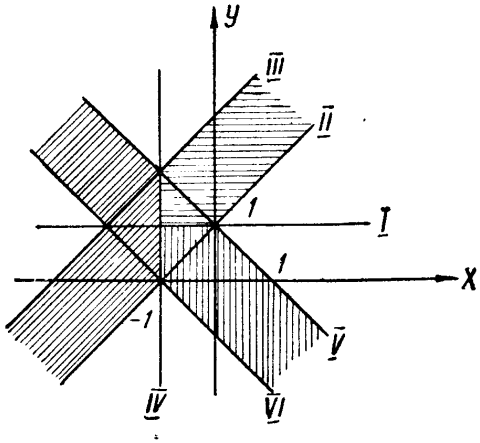


Рис. 59

827. Данное неравенство равносильно такому: $|y| < |x|$, которое приводится к следующим: $-|x| < y < |x|$. Если $x > 0$, то $-x < y < x$ и соответствующие точки расположены под прямой $y = x$ и над прямой $y = -x$. Если $x < 0$, то $x < y < -x$ и соответствующие точки расположены под прямой $y = -x$ и над прямой $y = x$. Следовательно, точки, координаты которых удовлетворяют данному неравенству, расположены в правом и левом углах, образованных прямыми $y = x$ и $y = -x$ (рис. 60).

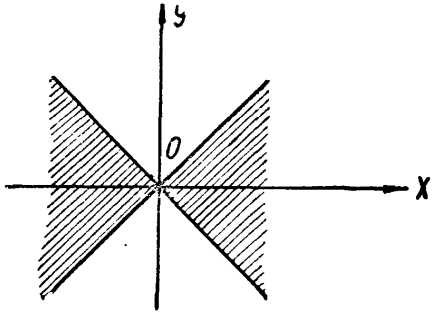


Рис. 60

828. В сегменте, отсекаемом прямой $y = x$ от параболы, $y = x^2$ (рис. 61).

829—834. Указание. Вещественные корни уравнения $f(x) = 0$ можно толковать геометрически как абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс. Таким образом, число таких точек даст число вещественных корней уравнения $f(x) = 0$. Вещественные корни уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ можно толковать геометрически как абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Таким образом, число последних даст число вещественных корней уравнения $f_1(x) = f_2(x)$.

Если начерчен график функции $y = f(x)$, то, измерив в выбранном для построения функции масштабе отрезки, соответствующие абсциссам точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс, можно приближенно определить корни уравнения $f(x) = 0$. Аналогичным способом можно приближенно определить корни уравнения $f_1(x) = f_2(x)$. В этом состоит графический способ решения уравнений. Степень точности графического решения уравнения существенно зависит от выбранного масштаба построения графика. Если вблизи точек пересечения графиков выполнить построение в достаточно большом масштабе, то можно получить корни уравнения с высокой степенью точности.

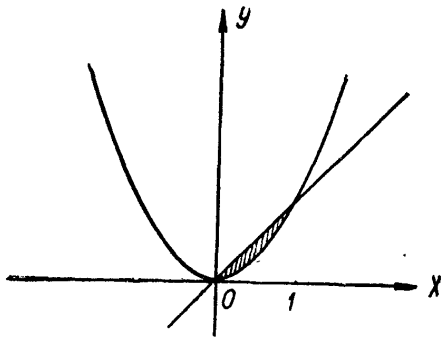


Рис. 61

829. Строим графики функций $y = \sin x$ и $y = x$. Они имеют одну точку пересечения (рис. 62). Следовательно, уравнение имеет только один корень $x = 0$.

830. Строим графики функций $y = 2^x$ и $y = x + 2$. Из рис. 63 видно, что графики пересекаются в двух точках. Следовательно, уравнение имеет два корня. Один корень $x = 2$. Другой корень, как видно из рисунка, заключен в интервале $(-2, -1)$. Последнее легко проверить вычислением. Действительно, подставив в $f(x) = 2^x - x - 2$ сперва $x = -2$, а затем $x = -1$, получим $f(-2) > 0$ и $f(-1) < 0$. Следовательно, в интервале $(-2, -1)$ функция обращается в нуль.

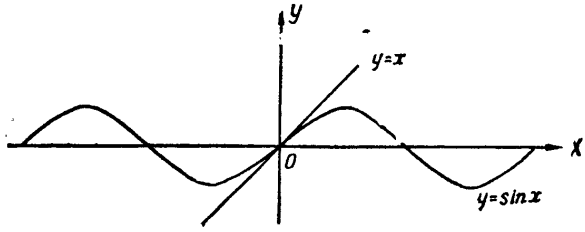


Рис. 62

831. Строим график функции $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$. Из рис. 64 видим, что график пересекается с осью абсцисс в трех точках. Следовательно, уравнение имеет три вещественных корня. Из рисунка также видно, что один из корней находится в интервале $(-1, 0)$, другой в интервале $(0, 1)$ и третий в интервале $(2, 3)$. Последнее легко проверить вычислением (см. решение задачи 830).

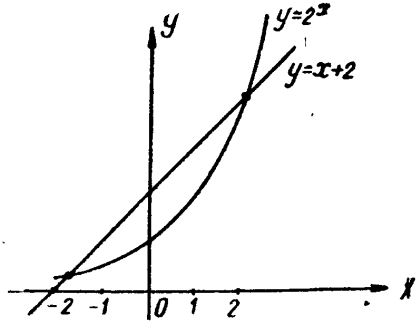


Рис. 63

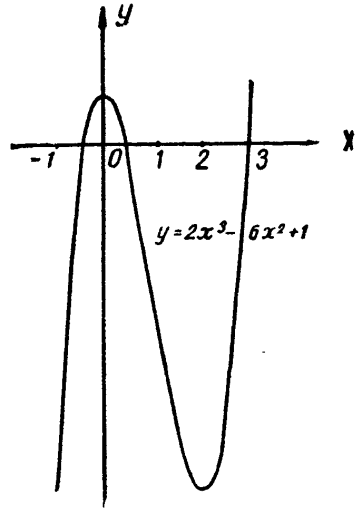


Рис. 64

832. Строим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$. В силу нечетности этих функций положительному корню уравнения соответствует равный ему по абсолютной величине отрицательный корень того же уравнения. Поэтому интересуемся лишь корнями не-

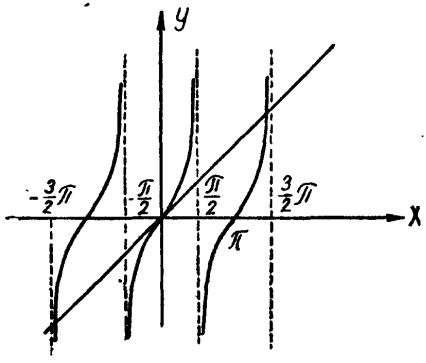


Рис. 65

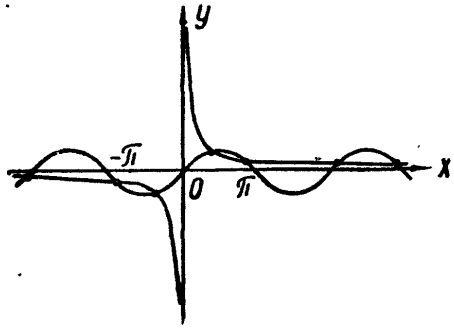


Рис. 66

отрицательными. Из рис. 65 видим, что уравнение имеет корень $x = 0$, а затем корни, заключенные в интервалах

$$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \ldots, \left(k\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right), \ldots$$

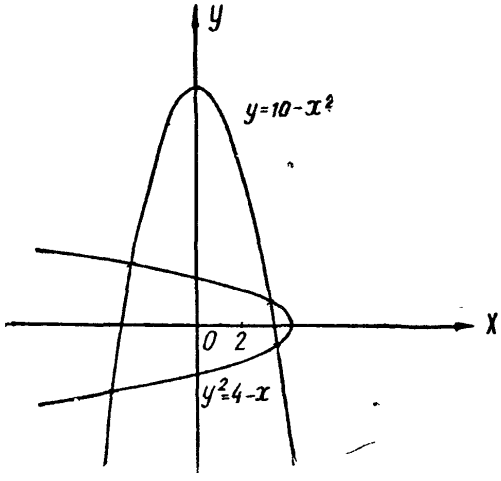


Рис. 67

С увеличением k корень приближается к величине $\frac{2k+1}{2}\pi$. Таким образом, уравнение имеет корень $x = 0$ и бесконечное множество корней как положительных, так и отрицательных.

833. Строим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{x}$ (гипербола). Как видно из рис. 66, уравнение имеет бесконечное множество корней как положительных, так и отрицательных. Первый положительный корень содержится в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а следующие положительные близки к значениям π, 2π, 3π, ... В силу нечетности функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{x}$ каждому положительному корню соответствует равный по абсолютной величине отрицательный.

834. Строим графики парабол $y = -x^2 + 10$ и $x = 4 - y^2$ (рис. 67) и измеряем абсциссы и ординаты их точек пересечения. Находим: $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 \approx 3{,}3$, $y_2 \approx -0{,}7$; $x_3 \approx -3{,}6$, $y_3 \approx \approx -2{,}9$; $x_4 \approx -2{,}8$, $y_4 \approx 2{,}6$.

XIII.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

(Планиметрия)

835. Дано: в $\triangle ABC$ $AE \perp CB$, $BD \perp AC$, $AE = BD$. Доказать: $AC = CB$ (рис. 68). $\triangle ABD = \triangle AEB$, потому что у них общая гипотенуза AB и равные по условию катеты AE и BD. Следовательно, равны и углы DAB и EBA, как углы равных треугольников, лежащих против равных сторон DB и EA. Но тогда $AC = CB$, как стороны $\triangle ABC$, лежащие против равных углов EBA и DAB.

836. Дано: в $\triangle ABC$ $AD = DC$, $BE = EC$, $AE = DB$. Доказать: $AC = BC$ (рис. 68). Точка пересечения медиан O отсекает от медианы $\frac{1}{3}$ часть ее, считая от основания. Поэтому $AO = \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} BD = BO$ и $\triangle AOB$ — равнобедренный. Но тогда $\angle DBA = \angle EAB$, а следовательно, и $\triangle DBA = \triangle EAB$, как имеющие равные углы ($\angle DBA = \angle EAB$), заключенные между равными сторонами ($AE = BD$ по усло-

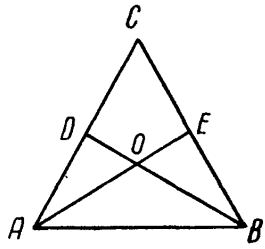


Рис. 68

вию, AB — общая). Отсюда вытекает, что $AD = BE$, как стороны равных треугольников, лежащих против равных углов. Но так как $AD = \frac{1}{2}AC$, $BE = \frac{1}{2}BC$, то $AC = BC$.

837. Дадим два доказательства этой теоремы.

Доказательство I. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 69) биссектрисы AD и CE равны. Нужно доказать, что $\triangle ABC$ — равнобедренный.

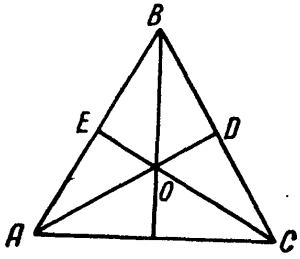


Рис. 69.

Проведем третью биссектрису BO, где O — точка пересечения биссектрис. Возьмем теперь второй экземпляр этого треугольника и будем соответственные точки обозначать теми же буквами, но снабженными значком 1. Приложим $\triangle A_1B_1C_1$ к $\triangle ABC$ так, чтобы вершина C_1 совпала с точкой D, биссектриса C_1E_1 с DA, а вершины B и B_1 были расположены по одну сторону от линии совмещения этих биссектрис (рис. 70). В силу равенства углов B и B_1 заключаем, что вокруг четырехугольника $ADBB_1$ можно описать окружность. Покажем, что $AD \parallel BB_1$.

Действительно, на основании теоремы о внешнем угле треугольника можем написать: $\angle BOD = \angle BAD + \angle OBA$. Но $\angle BAD = \angle BB_1D$ (вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу), а $\angle OBA = \angle O_1B_1D$ (половины равных углов B и B_1). Поэтому $\angle BOD = \angle BB_1O_1$ или $\angle BB_1O_1 + \angle BOO_1 = 2d$.

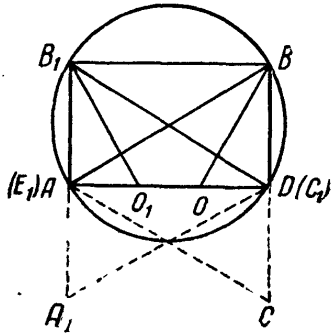


Рис. 70.

Таким образом, вокруг четырехугольника OBB_1O_1 можно описать окружность, а так как у него $O_1B_1 = OB$, как один и тот же отрезок биссектрисы угла B, то дуги окружности, описанной вокруг четырехугольника O_1OBB_1, стягиваемые хордами O_1B_1 и OB, будут равны. В таком случае $OO_1 \parallel BB_1$ или $AD \parallel BB_1$. Итак, четырехугольник $ADBB_1$ есть вписанная в окружность равнобедренная трапеция. Но в равнобедренной трапеции диагонали AB и B_1D равны. Отсюда следует, что $AB = BC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Замечание. Так как при доказательстве было использовано лишь условие $AD = CE$, а то, что AD и CE — биссектрисы, не было использовано, то тем самым доказана не только сформулированная выше теорема, но и следующая, более общая: *если из двух вершин треугольника проведены к противоположным сторонам два*

отрезка, имеющие точку пересечения на биссектрисе третьего угла и равные между собой, то треугольник равнобедренный.

Доказательство II. Дано, что в $\triangle ABC$ $AE = BD$ и AE и BD — биссектрисы углов A и B (рис. 71). Нужно доказать, что $AC = BC$.

Проведем $BF \parallel AE$ и $AF \parallel BE$. Пусть $\angle DBA = \alpha$ и $\angle EAB = \beta$. Рассмотрим треугольники ABD и ABF.

В этих треугольниках сторона AB общая, а $BF = BD$, как равные одному и тому же отрезку AE (один по построению, другой по условию). Если допустить, что $\angle DBA > \angle ABF$, т. е. что $\alpha > \beta$ ($\angle ABF = \angle EAB = \beta$), то сторона AD будет больше стороны AF, потому что в неравных треугольниках с двумя соответственно равными сторонами против большего угла лежит и большая сторона.

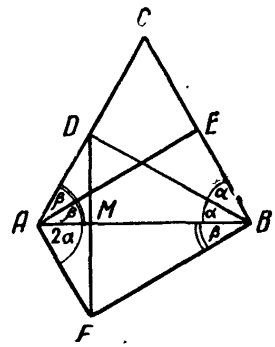


Рис. 71.

Итак, имеем $AD > AF$, если $\alpha > \beta$.

Рассмотрим теперь $\triangle ADF$, в котором AD и AF являются сторонами. В нем $\angle ADF > \angle AFD$. Действительно, $\angle ADF = 180° - 2\beta - \angle AMD = 180° - 2\beta - (\alpha + \angle BDF) = 180° - \alpha - \angle BDF - \beta - \beta$; $\angle AFD = 180° - \angle MAF - \angle AMF = 180° - 2\alpha - (\beta + \angle BFD) = 180° - 2\alpha - \beta - \angle BFD = 180° - \alpha - \angle BFD - \beta - \alpha$. Но $\angle BDF = \angle BFD$, как углы при основании равнобедренного $\triangle BFD$ ($BD = BF$). Учитывая, кроме того, что по предположению $\alpha > \beta$, получаем $\angle ADF > \angle AFD$. Но в треугольнике против большего угла лежит и большая сторона, т. е. $AF > AD$. Однако это противоречит полученному ранее: $AD > AF$.

Итак, α не может быть больше β, а ввиду равноправности α и β не может быть и $\alpha < \beta$. Остается лишь $\alpha = \beta$, $2\alpha = 2\beta$ и, следовательно, $AC = CB$.

Замечание. Доказательство II является доказательством от противного, но оно имеет зато одно преимущество перед доказательством I, состоящее в том, что требует меньшего объема знаний из начального курса геометрии, так как использует лишь теоремы о равенстве и неравенстве треугольников и о параллельных линиях. Измерение вписанных углов и возможность вписать четырехугольник в окружность, используемые в доказательстве I, здесь не требуются.

Подобно доказательству I здесь также допускается обобщение, Эта более общая теорема состоит в следующем: *если отрезки прямых* AE и BD (рис. 71), *проведенные из вершины* A и B $\triangle ABC$ *к противоположным сторонам, пересекаются внутри треугольника, равны между собой и разбивают углы* A и B *так, что* $\angle B = \alpha_1 + \alpha_2$, $\angle A = \beta_1 + \beta_2$, *где* α_1 и β_1 *имеют общую сторону* AB, *то или* $\alpha_1 \geqslant \beta_1$ *и* $\alpha_2 \leqslant \beta_2$ *или* $\alpha_1 \leqslant \beta_1$ *и* $\alpha_2 \geqslant \beta_2$.

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства II, если только в выкладках доказательства иметь в виду, что углы при основании треугольника не 2α и 2β, а $\alpha_1 + \alpha_2$ и $\beta_1 + \beta_2$.

838. Дано, что в $\triangle ABC$ (рис. 72) $AO = OC$ и $\angle ABO = \angle OBC$. Нужно доказать, что $AB = BC$. Продолжим BO на расстояние $OD = OB$ и точку D соединим с точками A и C. Так как $AO = OC$ по условию, а $OB = OD$ по построению, то четырехугольник $ABCD$ параллелограмм. Но $\angle ABO = \angle OBC$ и поэтому этот параллелограмм есть ромб. Отсюда $AB = BC$.

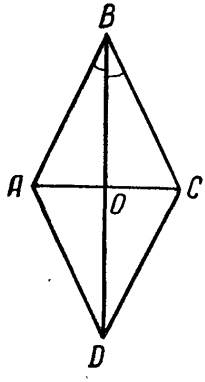


Рис. 72

839. Дано, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$, $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$ (рис. 73). Нужно доказать равенство этих треугольников. Продолжим сторону AB на отрезок $BD = BC$ и точку D соединим с C. В равнобедренном $\triangle CBD$ $\angle D = \angle DCB$, как углы при основании, сумма их равна внешнему $\angle ABC$, а потому $\angle ABC = 2\angle D$. Делая аналогичные построения для $\triangle A_1B_1C_1$, также установим, что $\angle A_1B_1C_1 = 2\angle D_1$. Но $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$, потому что у них $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$, $AD = AB + BD = AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1 = A_1D_1$. Отсюда $\angle D = \angle D_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, а тогда равны и третьи углы данных треугольников, т. е. $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ и, следовательно, треугольники равны.

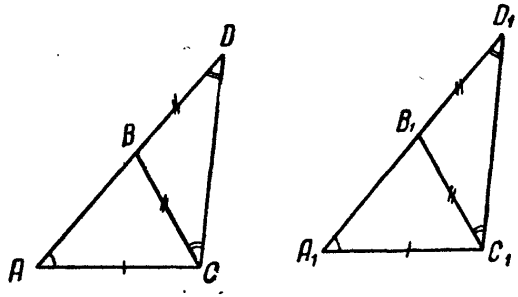


Рис. 73

840. Дано, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $AB + BC + AC = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1$ (рис. 74). Доказать равенство этих треугольников. Продолжим сторону AB на отрезок $BD = BC$ и на отрезок $AE = AC$ и соединим точки D и E с C. В равнобедренном треугольнике DBC $\angle D = \angle DCB$, как углы при основании, сумма их равна внешне-

му углу ABC, а потому $\angle D = \frac{1}{2} \angle ABC$. Точно так же докажем, что $\angle E = \frac{1}{2} \angle BAC$. Делая аналогичные построения для $\triangle A_1B_1C_1$, получим, что $\angle D_1 = \frac{1}{2} \angle A_1B_1C_1$ и $\angle E_1 = \frac{1}{2} \angle B_1A_1C_1$. Но

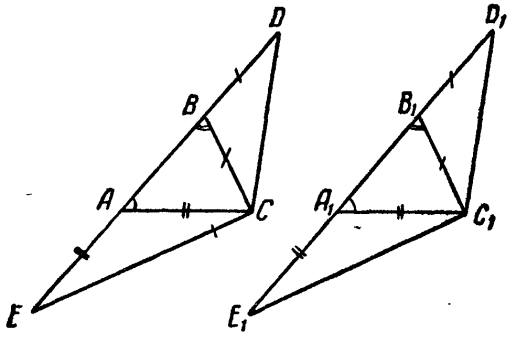


Рис. 74

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, а $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, поэтому $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$. Кроме того, $ED = E_1D_1 = 2p$ и, следовательно, $\triangle DEC = \triangle D_1E_1C_1$. Из равенства этих треугольников вытекает равенство $DC = D_1C_1$, а так как ранее было доказано, что $\angle D = \angle D_1$, то равнобедренные треугольники CBD и $C_1B_1D_1$ равны. Теперь имеем в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $BC = B_1C_1$ (боковые стороны в равных равнобедренных треугольниках), $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (по условию), $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ (как дополняющие равные величины до 180°). Отсюда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

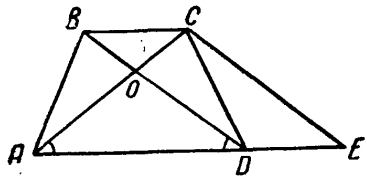


Рис. 75

841. Дано, что в трапеции $ABCD$ $AC = BD$. Доказать, что $AB = CD$ (рис. 75). Через вершину C проведем прямую $CE \parallel BD$ до пересечения с продолжением основания AD в точке E. В треугольнике ACE $AC = CE = BD$ (CE и BD — противоположные стороны параллелограмма), поэтому он равнобедренный. Но тогда $\angle CEA = \angle CAE$, как углы при основании равнобедренного треугольника, а так как $\angle BDA = \angle CEA$ (соответственные), то и $\angle CAD = \angle BDA$. Переходя к рассмотрению треугольников ABD и ACD, видим, что они равны, потому что у них $AC = BD$, $\angle CAD = \angle BDA$, AD — общая. Но тогда $AB = CD$, как третьи стороны равных треугольников.

842. Пусть $AB = DE$ и $AB \parallel DE$ (рис. 76). Соединим A с E и B с D. В четырехугольнике $ABDE$ стороны AB и DE равны и параллельны, и он, следовательно, есть параллелограмм. Но диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Итак, диагонали AD и BE разделятся точкой O пополам. Но если рассмотреть теперь четырехугольник $AFDC$, то также убедимся, что CF разделится в точке O пополам. Итак, AD, BE и CF проходят через точку O.

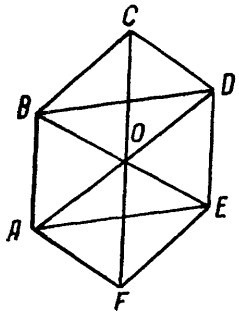


Рис. 76

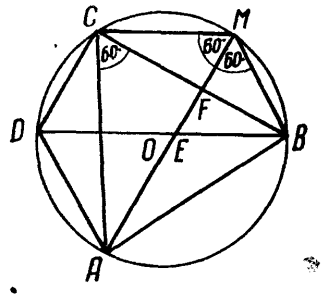


Рис. 77

843. Пусть правильный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O (рис. 77). Возьмем на дуге BC точку M. Требуется доказать, что $MB + MC = MA$. Проведем $BD \parallel CM$. Пусть точка пересечения прямых BD и AM есть E. Покажем, что $MB = ME$. Действительно, углы треугольника ABC, как равностороннего, равны 60°; $\angle AMB = \angle ACB = 60°$ (вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB); $\angle CMA = \angle CBA = 60°$ (вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу ADC); $\angle MEB = \angle CMA = 60°$ (накрест лежащие при параллельных CM и DB и секущей AM). Итак, в треугольнике MBE два угла по 60°, следовательно, и третий также равен 60°. Поэтому треугольник MBE равносторонний и $MB = ME$. Покажем теперь, что $MC = EA$. Соединим точку D с точкой A. Треугольник DEA — равносторонний, потому что $\angle DEA = \angle MEB = 60°$ (вертикальные), $\angle ADB = \angle ACB = 60°$ (вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB), $\angle DAE = 180° - \angle ADE - \angle DEA = 180° - 60° - 60° = 60°$. Поэтому $DE = AE$. Соединим теперь точку D с точкой C. Четырехугольник $EDCM$ есть параллелограмм, потому что $\angle CDB = \angle CAB = 60°$ (вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу CB), и, следовательно, накрест лежащие углы CDB и DEA при прямых CD и AM и секущей DB

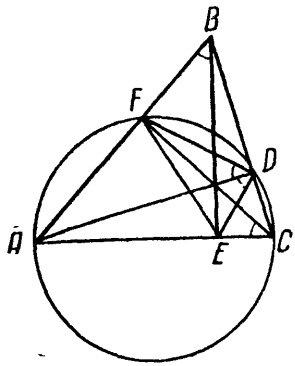


Рис. 78

равны, что доказывает параллельность CD и AM ($DE \parallel CM$ по построению). Но в параллелограмме противоположные стороны равны и мы имеем $CM = DE = EA$. Окончательно $AM = AE + EM = CM + MB$.

844. Пусть AD, BE и CF — высоты остроугольного треугольника ABC (рис. 78). Нужно доказать, что AD, BE и CF — биссектрисы треугольника DEF. Докажем, например, что $\angle EDA = \angle ADF$. Так как $\angle AFC = \angle ADC = 90°$, то вокруг четырехугольника $AFDC$ можно описать окружность. Тогда убедимся, что $\angle ADF = \angle ACF$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AF. Точно так же докажем, что $\angle EDA = \angle EBA$. Но из прямоугольных треугольников ABE и ACF получим $\angle ABE = 90° - \angle BAC = \angle ACF$. Следовательно, $\angle EDA = \angle ADF$.

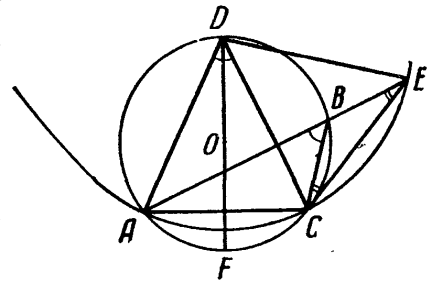


Рис. 79

845. На данном основании $AC = a$ построим сегмент, вмещающий данный угол (рис. 79). Соединим какую-либо точку B окружности с точками A и C. Получим треугольник ABC с данным основанием и данным углом при вершине. Проведем теперь диаметр $DF \perp AC$ и построим окружность радиуса DA с центром в D. Предполагая, что точка B отлична от D, продолжим AB до пересечения с построенной окружностью в точке E и соединим ее с C, а точку D с A, C и E. Покажем, что $BE = BC$. Действительно, $\angle ADC = \angle ABC$ (вписанные в окружность O, опирающиеся на одну и ту же дугу), $\angle ADC = 2 \angle AEC$ (первый — центральный, а второй — вписанный в окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу). Но тогда $\angle BCE = \angle ABC - \angle AEC = \angle ADC - \angle AEC = 2 \angle AEC - \angle AEC = \angle AEC$, а следовательно, треугольник CBE — равнобедренный и $BC = BE$. Отсюда $AB + BC = AB + BE = AE$, и так как B не совпадает с центром D, то AE есть хорда, и для нее при любом выборе точки B справедливо $AE < AD + DE$ ($AD + DE$ равно диаметру). Заметив, что $DC = DE$ (радиусы окружности D), получаем $AD + DC > AB + BC$, т. е. искомый треугольник — равнобедренный.

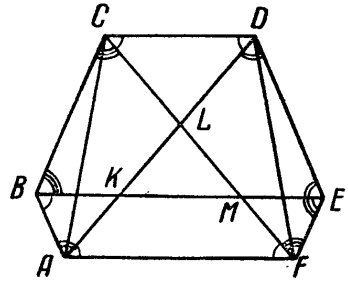


Рис. 80

846. В трапеции $ACDF$ (рис. 80) $AD = CF$ и потому она равнобедренная (задача 841). Отсюда получаем $\angle LCD = \angle LDC$. Но $\angle LAF = \angle LDC$ и $\angle AFL = \angle DCL$ (накрест лежащие) и, следовательно,

$\angle LCD = \angle LDC = \angle LAF = \angle LFA$. Точно так же $\angle KBA = \angle KAB = \angle KED = \angle KDE$, $\angle MCB = \angle MBC = \angle MEF = \angle MFE$. Рассматривая теперь четырехугольник $BCDE$, видим, что у него суммы противоположных углов равны и потому через точки B, C, D и E можно провести окружность. Но тогда в силу равенства углов CBE и CFE она пройдет через вершину F, а в силу равенства углов DCF и DAF — через вершину A. Теорема доказана.

847. Пусть AD, BE и CF — высоты треугольника ABC (рис. 81), пересекающиеся в точке O, а OK и OL — диаметры окружностей, описанных вокруг AB и BC и проходящих через O.

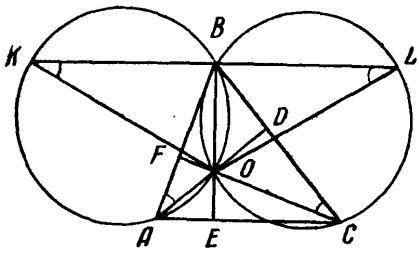


Рис. 81

Покажем, например, что $OK = OL$. Соединим L с B и K с B. Так как $\angle OBK = \angle OBL = 90°$, то LB является продолжением BK. Но $\angle OKB = \angle OAB$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Точно так же $\angle OLB = \angle OCB$. С другой стороны, $\angle OAB = 90° - \angle ABD = \angle OCB$.

Следовательно, $\angle OKB = \angle OLB$, треугольник OKL — равнобедренный и $OK = OL$.

848. Пусть $BD \perp AC$ и $AE \perp BC$ (рис. 82). Прямоугольные треугольники CBD и CAE, как имеющие общий угол ACB, подобны. Из их подобия получаем $\frac{CD}{CE} = \frac{BC}{AC}$. Таким образом, треугольники CDE и ABC имеют общий угол ACB, заключенный между пропорциональными сторонами, откуда и следует подобие этих треугольников.

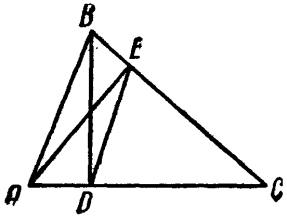


Рис. 82

849. Известно, что углы с параллельными сторонами или равны, или в сумме составляют два прямых. Если допустить, что каждая пара соответственных углов треугольников в сумме составляет два прямых, то сумма шести углов треугольников даст шесть прямых, что невозможно. Если допустить, что треугольники имеют только по одному равному углу, то сумма шести углов треугольников будет больше четырех прямых, что опять невозможно. Остается допустить, что два угла одного треугольника равны двум углам другого. Но тогда треугольники подобны.

850. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, R и r — радиусы описанных около этих треугольников кругов. Доказать: $R : r = AC : A_1C_1$ (рис. 83). Соединим центр окружности O с точками A и C. В треугольни-

ке AOC $AO = OC = R$, а $\angle AOC = 2 \angle ABC$, так как он, как центральный, измеряется дугой AC, в то время как $\angle ABC$ — вписанный и измеряется половиною дуги AC. Соединив центр окружности O_1 с точками A_1 и C_1, также получим равнобедренный $\triangle A_1O_1C_1$ с углом при вершине $A_1O_1C_1$, который равен удвоенному углу $A_1B_1C_1$. Но $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, как соответственные в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, поэтому $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$. Отсюда вытекает, что равнобедренные треугольники AOC и $A_1O_1C_1$ подобны и имеет место пропорция $OC : O_1C_1 = AC : A_1C_1$ или $R : r = AC : A_1C_1$.

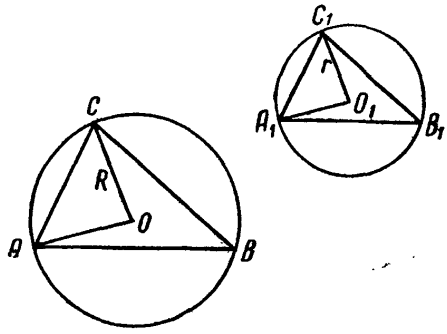


Рис. 83

851. Предположим, что CD (рис. 84) не касательная. Тогда она будет секущей, и пусть E — вторая общая точка прямой CD с окружностью. Построим треугольники AEC и DBC. Они подобны, так как у них $\angle C$ — общий, а углы CBD и CEA равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD. Из подобия получим $CA \cdot CB = CD \cdot CE \neq CD^2$, так как $CE \neq CD$ ($CE = CD + DE$ или $CE = CD - DE$). Но это противоречит условию. Следовательно, CD — касательная.

852. Проведем медиану AD $\triangle ABE$ (рис. 85) и рассмотрим треугольники ADB и ADC. В этих треугольниках угол D общий. Кроме того, у них отношения сторон, заключающих этот угол, равны. Действительно, $DB : AD = a : a\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$, $DC : AD = 2a : a\sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$. Следовательно, $\triangle ADB \sim \triangle ADC$. Но в подобных треугольниках против сходственных сторон лежат равные углы. Поэтому $\angle ABD = \angle DAC$, а $\angle ABD + \angle ACD = \angle DAC + \angle ACD = \angle ADE$ (свойство внешнего угла треугольника). Отсюда $\angle ABD + \angle ACD = 45°$.

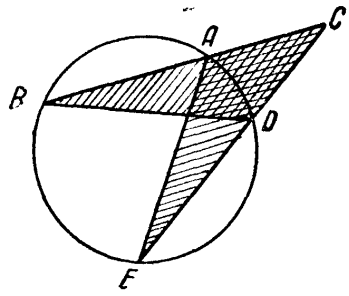


Рис. 84

853. Дано, что в четырехугольнике $ABCD$ $AM = MD$, $BN = NC$ и $MN = \dfrac{AB + DC}{2}$ (рис. 86). Нужно доказать, что $ABCD$ — трапеция.

Проведем отрезок прямой DN и продолжим его на величину $NE = DN$. Соединим точку E с точкой A. Получим $\triangle ADE$, в ко-

тором MN есть средняя линия, и она равна $\frac{AE}{2}$. Соединим теперь точку E с точкой B. Получим $\triangle NEB$, равный $\triangle DNC$, так как у них $CN = NB$ (по условию), $DN = NE$ (по построению) и $\angle CND = \angle BNE$, как вертикальные. Отсюда получаем, что $BE = CD$ и, следовательно, $MN = \frac{AB + BE}{2}$. Сравнивая с полученным ранее равенством $MN = \frac{AE}{2}$, находим, что $AB + BE = AE$. Но это возможно только в том случае, когда AB и BE лежат на одной прямой. Так как $BE \parallel CD$, то теорема доказана.

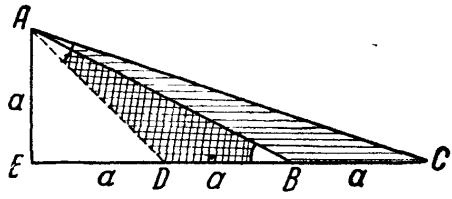


Рис. 85

854. Пусть O — центр описанного около $\triangle ABC$ круга (рис. 87); AD, BE и CF — его высоты; H — точка пересечения высот; M, K и L — середины отрезков AH, BC и AC. Нужно доказать, что $KM = AO$. $\triangle OKL \sim \triangle ABH$ в силу параллельности сторон, а так как $KL = \frac{1}{2} AB$, то $OK = \frac{1}{2} AH = AM$. Рассматривая четырехугольник $AOKM$, видим, что в нем противоположные стороны OK и AM равны и параллельны. Поэтому $AOKM$ — параллелограмм и $KM = AO$.

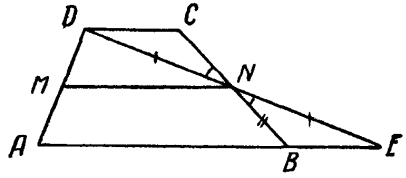


Рис. 86

855. Противоположные стороны описанного четырехугольника попарно параллельны, так как каждая пара сторон перпендикулярна к одной и той же диагонали прямоугольника. Таким образом, этот четырехугольник — параллелограмм с равными высотами. Но тогда он будет ромб, что следует, например, из сравнения двух выражений для его площади ($ah_a = bh_b$).

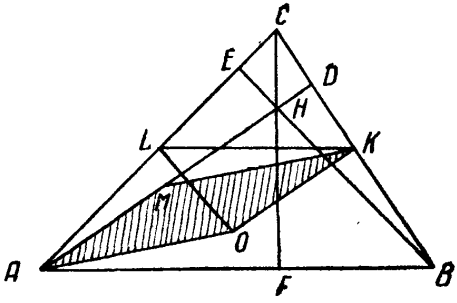


Рис. 87

856. Пусть в $\triangle ABC$ высоты AK, BL, CM пересекаются в H (рис. 88). Точки K, L, M лежат на сторонах треугольника. Проведем диаметр AD окружности, описанной около $\triangle ABC$, и соединим точки M и L. Нужно доказать: $ML \perp AD$.

Опишем окружность вокруг четырехугольника $ALHM$. Это можно сделать, так как $\angle ALH = \angle AMH = d$. Тогда $\angle AHL = \angle AML$ (вписанные, опирающиеся на $\cup AL$). Кроме того, $\angle AHL = \angle BCA$ (взаимно перпендикулярные стороны) и $\angle ADB = \angle ACB$ (вписанные, опирающиеся на $\cup AB$). Следовательно, $\angle AML = \angle ADB$. Обозначим точку пересечения AD и ML буквой N. В треугольниках AMN и ABD два угла одного равны двум углам другого. Поэтому $\angle ANM = \angle ABD = d$, т. е. $ML \perp AD$.

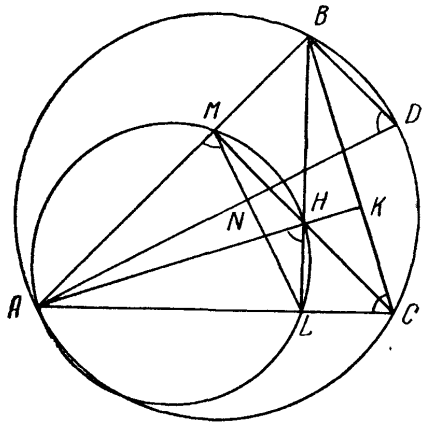


Рис. 88

857. Пусть продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ (рис. 89) пересекаются в точке E, а BC и AD — в точке F. Пусть биссектриса угла E пересекает окружность в точках K и L, а угла F — в точках M и N. Пользуясь теоремой об измерении угла, образованного секущими с помощью дуг, можно написать:

$$\cup AN - \cup DM = \cup BN - \cup CM,$$
$$\cup AL - \cup KB = \cup DL - \cup CK.$$

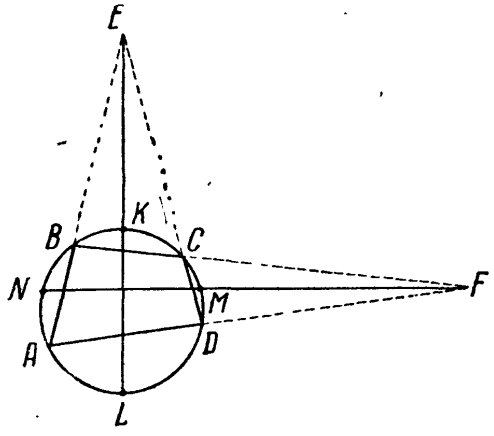


Рис. 89

Сложив эти равенства почленно и сделав преобразование, получим $\cup KN + \cup ML = \cup LN + \cup MK$, что и доказывает теорему.

858. Указание. Треугольник, одна вершина которого совпадает с вершиной прямого угла данного треугольника, а две другие

находятся в центре окружности и в точке касания окружности с катетом, — равнобедренный.

859. Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 90) диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а точка E есть середина большего основания. Проведем прямую EO и пусть F будет точка пересечения прямой EO с меньшим основанием. Докажем, что F есть середина основания BC. Для этого рассмотрим треугольники DEO и BOF. Они подобны, так как у них $\angle BOF = \angle DOE$ (как вертикальные) и $\angle FBO = EDO$ (накрест лежащие). Следовательно, $\frac{BF}{ED} = \frac{OF}{OE}$. Но, очевидно, и треугольники CFO и AEO тоже подобны, а поэтому $\frac{FC}{AE} = \frac{FO}{OE}$.

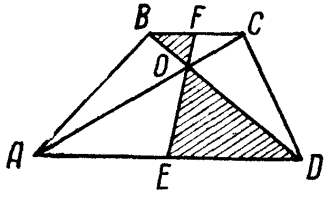


Рис. 90

Таким образом, $\frac{BF}{ED} = \frac{FC}{AE}$, а так как $ED = AE$, то $BF = FC$.

860. Соединим точку D с точкой A и точку P с центром окружности O (рис. 91). Обозначим точку пересечения AC и PD через E. Так как $\triangle DEC \sim \triangle DPB$, то $EC : PB = DC : DB$. Так как $\triangle ADC \sim \triangle POB$ ($\angle ADC = \angle POB$), то $PB : AC = OB : DC$. Перемножая почленно полученные пропорции, найдем $EC = \frac{1}{2} AC$.

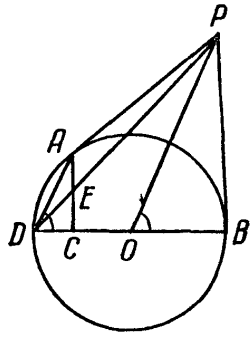


Рис. 91

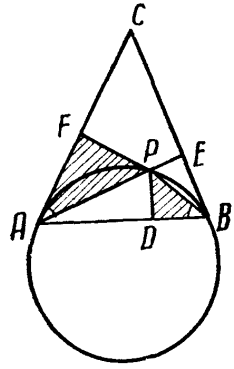


Рис. 92

861. Пусть AB — хорда (рис. 92); AC и BC — касательные, P — точка окружности; PD, PE и PF — перпендикуляры, опущенные из P на AB, BC и AC. Из подобных треугольников PDB и APF ($\angle PAF = \angle PBA$, как измеряемые половиной дуги PA) найдем $PD : PB = PF : AP$. Точно так же из подобных треугольников

PAD и PBE ($\angle PBE = \angle PAB$, как измеряемые половиной дуги PB) получим $PD : AP = PE : PB$. Перемножая почленно полученные равенства, найдем $PD^2 = PF \cdot PE$.

862. Пусть O_1 есть центр описанного около треугольника круга, O_2 — точка пересечения его высот и O_3 — центр тяжести треугольника (рис. 93). Соединим точки O_1 и O_3, а также O_3 и O_2 отрезками прямых. Докажем, что O_1O_3 и O_3O_2 составляют одну прямую. Треугольники O_1O_3D и O_2O_3B подобны. Действительно, $\angle O_1DO_3 = \angle O_2BO_3$, как накрест лежащие при параллельных, $O_3D : O_3B = 1 : 2$ — по свойству центра тяжести треугольника, $DO_1 : BO_2 = DE : BC = 1 : 2$, так как ED есть средняя линия $\triangle ABC$, и $\triangle EO_1D \sim \triangle CO_2B$ вследствие параллельности их сторон (см. задачу 849). Отсюда $\angle BO_3O_2 = \angle DO_3O_1$ и отрезки O_1O_3 и O_3O_2 лежат на одной прямой. При доказательстве предполагалось, что медиана не совпадает с высотой. Но случай такого совпадения соответствует равнобедренному треугольнику, и в этом случае теорема очевидна.

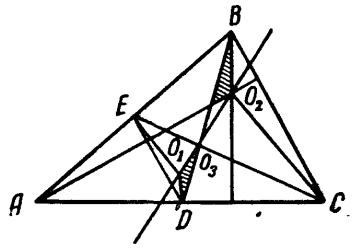


Рис. 93

863. Нужно доказать, что $EO = OF$ (рис. 94). Проведем через точку пересечения диагоналей O высоту KP. Так как $EF \parallel AB$, то $\triangle COF \sim \triangle CAB$ и $\triangle DOE \sim \triangle DBA$. В подобных треугольниках отношение сходственных сторон равно отношению сходственных высот, и поэтому из первой пары подобных треугольников получаем пропорцию $\frac{OF}{AB} = \frac{KO}{KP}$, а из второй $\frac{EO}{AB} = \frac{KO}{KP}$ (KP, очевидно, равна высоте $\triangle ACB$, проведенной из вершины C, и высоте $\triangle ADB$, проведенной из вершины D; точно так же KO для треугольников OCF и ODE). Сравнивая написанные соотношения, получаем $\frac{OF}{AB} = \frac{EO}{AB}$ и $OF = EO$.

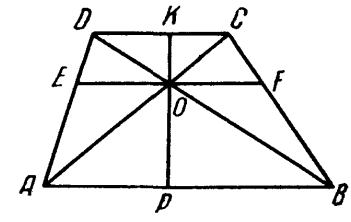


Рис. 94

864. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около круга с центром O, и E — середина его диагонали AC (рис. 95). Нужно доказать, что прямая OE пересекает вторую диагональ BD в ее середине. Обозначим точку пересечения OE и BD буквой F. Обозначим радиус круга через r, а периметр и площадь четырехугольника

через $2p$ и S. Так как для описанного четырехугольника $AB + DC = AD + BC = p$ и $S = pr$, то можно написать, что

$$S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} r(AD + BC) = \frac{1}{2} pr = \frac{1}{2} S. \qquad (*)$$

С другой стороны,

$$S_{BCE} + S_{DAE} = \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{1}{2} S_{ADC} = \frac{1}{2} S. \qquad (**)$$

Сравнивая равенства (*) и (**), найдем $S_{BCE} + S_{DAE} = S_{AOD} + S_{BOC}$ или $S_{BOC} - S_{BCE} = S_{DAC} E - S_{AOD}$, или $S_{BOE} + S_{OEC} = S_{AOE} + S_{DOE}$. Но $S_{OEC} = S_{AOE}$, и поэтому $S_{BOE} = S_{DOE}$. Из последнего равенства находим, что $BN = DM$.

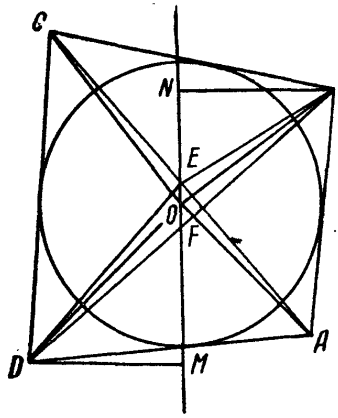


Рис. 95

Рассматривая треугольники BFN и DMF, видим, что они имеют по равному катету и острому углу. Следовательно, $\triangle FBN = \triangle FDM$ и $FB = DF$.

865. Указание. Наиболее удаленная точка окружности от данной хорды есть точка пересечения окружности с перпендикулярным к хорде диаметром.

866. Теорема будет сразу же доказана, если установить, что $\triangle AOM \sim \triangle CNO$, где O — центр полукруга (рис. 96). В этих треугольниках $\angle A = \angle C$, как углы при основании равнобедренного треугольника. Покажем еще, что $\angle MOA = \angle ONC$. Пусть L, P и Q — точки касания прямых AB, MN и BC с полукругом. Так как $OL \perp AB$ и $OQ \perp BC$, то $\angle LOQ = 180° - \angle B$. С другой стороны, $180° - \angle B = \angle A + \angle C = 2\angle A$. Отсюда $\angle LOQ = 2\angle A$. Но MO есть биссектриса $\angle LOP$ и NO — биссектриса $\angle QOP$. Поэтому $\angle LOQ = 2\angle MON = 2\angle A$ и $\angle MON = \angle A$. Заметив, что в треугольниках AOM и ONM также $\angle AMO = \angle NMO$, заключаем, что и $\angle MOA = \angle MNO$. Так как $\angle MNO = \angle ONC$, то $\angle MOA = \angle ONC$ и $\triangle AOM \sim \triangle CNO$. Из подобия получаем $AM : AO = OC : NC$. Отсюда $AM \cdot NC = AO \cdot OC = AO^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$.

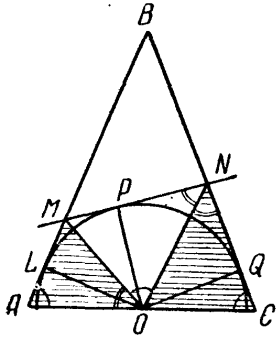


Рис. 96

867. Возможны два случая: а) прямые MAN и PBQ пересекаются вне данных окружностей; б) эти прямые пересекаются

внутри одной из окружностей (на рис. 97 второй случай изображен пунктиром). Разберем только первый случай. По свойству вписанного четырехугольника $\angle N + \angle ABQ = 180°$ и $\angle M + \angle ABP = 180°$. По свойству смежных углов $\angle ABQ + \angle ABP = 180°$. Складывая почленно первые два равенства и пользуясь третьим, получим $\angle M + \angle N = 180°$. Следовательно, $NQ \parallel MP$.

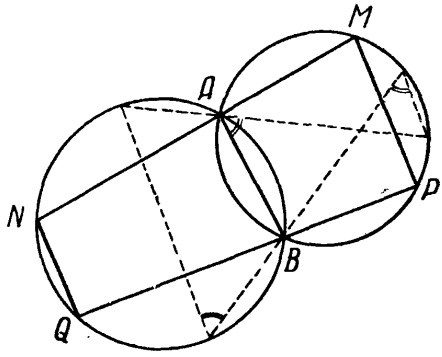


Рис. 97

868. Пусть $ABCD$ — вписанный в окружность четырехугольник с диагоналями AC и BD (рис. 98). Пусть угол ABD не меньше угла DBC. Проведем прямую BE так, чтобы $\angle ABE = \angle DBC$. Так как в треугольниках ABE и BDC, кроме этих равных углов, еще равны углы BAE и BDC, как вписанные, опирающиеся на дугу BC, то $\triangle ABE \sim \triangle BDC$. Поэтому

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE} \text{ или } DB \cdot AE = DC \cdot AB. \qquad (*)$$

Подобными будут также треугольники BCE и ABD, потому что у них $\angle ABD = \angle CBE$, как суммы равных углов, и $\angle ADB = \angle ACB$, как вписанные, опирающиеся на дугу AB. Поэтому $\frac{DB}{AD} = \frac{BC}{CE}$ или $DB \cdot CE = AD \cdot BC$. Складывая последнее равенство с равенством (*), получим:

$$DB \cdot AE + DB \cdot EC = DC \cdot AB + AD \cdot BC;$$
$$DB(AE + EC) = DC \cdot AB + AD \cdot BC;$$
$$DB \cdot AC = DC \cdot AB + AD \cdot BC.$$

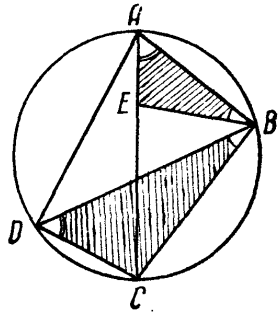


Рис. 98

869. Пусть длины катетов a и b, а гипотенузы c. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Умножим обе части равенства на c. Получим $c^3 = c \cdot a^2 + c \cdot b^2$. Но $a < c$ и $b < c$. Поэтому $c^3 = ca^2 + cb^2 > a \cdot a^2 + b \cdot b^2 = a^3 + b^3$. Итак, $c^3 > a^3 + b^3$.

870. Пусть O_1 — центр описанного около треугольника круга (рис. 99), а O — центр вписанного в него круга. Соединим прямой точки B и O и пусть D есть точка пересечения ее с описанной окружностью. Проведем диаметр $DE = 2R$ этой окружности. Так как BD — биссектриса угла ABC, то $AD = DC$ и потому $ED \perp AC$. Проведя $OK \perp ED$, найдем из треугольника OO_1D, что $OO_1^2 = O_1D^2 +$

$+ OD^2 - 2O_1D \cdot KD$. Но $O_1D = R$, $KD = KL + LD = OM + LD = r + LD$, где $OM \perp AC$. Поэтому $OO_1^2 = R^2 + OD^2 - 2R(r + LD) = R^2 - 2Rr + OD^2 - 2R \cdot LD = R^2 - 2Rr + OD^2 - AD^2$. Покажем, что $OD = AD$. Для этого рассмотрим треугольник AOD. Так как AO — биссектриса угла BAC и $\angle CAD = \angle DBC$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, то $\angle DAO = \angle DAC + \angle CAO = \angle DBC + \angle OAB = \angle DBA + \angle OAB$. Но и $\angle AOD = \angle DBA + \angle OAB$, так как $\angle AOD$ — внешний угол треугольника ABO. Из равенства углов AOD и DAO следует равенство $AD = OD$. Поэтому получаем:

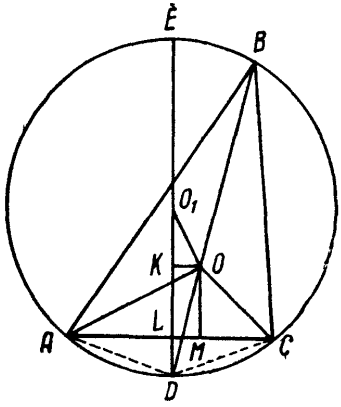


Рис. 99

$$OO_1^2 = R^2 - 2Rr;\ OO_1 = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Замечание. Решение задачи проведено на примере остроугольного треугольника. Однако и способ решения и результат будут верны для любого треугольника. Если треугольник равносторонний, то очевидно, что это расстояние равно нулю. Впрочем, и в этом случае полученная формула остается верной.

871. I. На основании задачи 870 квадрат расстояния между центром описанного около треугольника круга и центром вписанного в этот треугольник круга равен $R^2 - 2Rr$, где R и r — радиусы описанного и вписанного кругов. Поэтому имеем: $R^2 - 2Rr \geqslant 0$, $2Rr \leqslant R^2$, $r \leqslant \frac{1}{2}R$. Знак равенства будет иметь место только для равностороннего треугольника.

II. Пусть стороны треугольника будут a, b и c, а противолежащие им углы α, β и γ. Пользуясь формулой $S = pr$, где S и p — площадь и полупериметр треугольника, формулой $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, а также теоремой синусов, согласно которой $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, найдем, что отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно:

$$\frac{r}{R} = \frac{S}{pR} = \frac{ab\sin\gamma}{R(a+b+c)} = \frac{2R\sin\alpha\, 2R\sin\beta\sin\gamma}{2R^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)} =$$
$$= \frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Преобразуем знаменатель полученного выражения:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$$

$$+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Если же учесть, что

$$2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$$

$$=16\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\times$$

$$\times\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

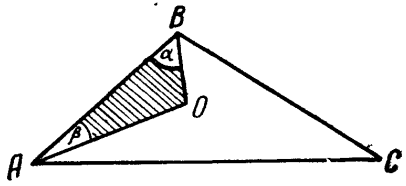


Рис. 100

то получим

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

(см. задачу 712).

872. Пусть в треугольнике ABC (рис. 100) $\angle ABC>\angle CAB$. Соединим центр O окружности, вписанной в треугольник, с его вершинами A и B и рассмотрим треугольник ABO. Его угол $\alpha=\frac{1}{2}\angle ABC$, потому что центр O лежит на биссектрисе BO угла ABC. Точно так же $\beta=\frac{1}{2}\angle CAB$. Но тогда $\beta<\alpha$, а так как в треугольнике против меньшего угла лежит меньшая сторона, то $OB<OA$. Отсюда ясно, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит ближе всего к вершине того угла треугольника, который является наибольшим углом.

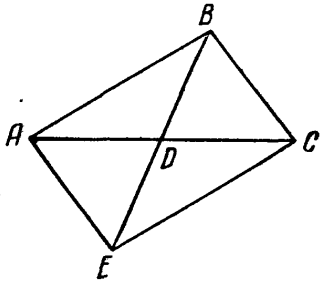


Рис. 101

873. В треугольнике ABC (рис. 101) проведем медиану BD к стороне AC, продолжим ее на отрезок $DE=BD$ и соединим точку E с A и C. В полученном четырехугольнике $ABCE$ диагонали в точке пересечения делятся пополам, и, следовательно, этот четырехугольник есть параллелограмм. Отсюда получаем, что $AB=CE$, $AE=BC$ и $(2BD)^2+AC^2=2AB^2+2BC^2$. Из этого равенства, положив в нем $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $BD=m_b$, найдем $m_b^2=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}$. Полученное соотношение показывает, что медиана будет наименьшей, если она проведена к наибольшей стороне.

874. Будет, потому что все его углы будут вписанными, опирающимися на равные дуги, а равносторонний и равноугольный многоугольник есть правильный.

875. Ромб может служить примером равностороннего, но не правильного многоугольника. Однако если он имеет нечетное число сторон, то он будет правильным. Докажем это.

Пусть вершины многоугольника, имеющего $(2n+1)$ сторону, будут обозначены через A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n+1}, а точки касания сторон с окружностью через B_1, B_2, B_3, ..., B_{2n+1} (рис. 102). Очевидно, $A_2B_1 = A_2B_2$. Но тогда, используя равенство сторон, получим, что $A_1B_1 = A_3B_2 = A_1B_{2n+1} = A_3B_3$, т. е. отрезки двух смежных сторон многоугольника, сходящихся в вершине A_1, считая от вершины до точек касания, равны таким же отрезкам сторон, сходящимся в вершине A_3. Точно так же покажем, что они равны отрезкам сторон, сходящимся в вершинах A_5, A_7, ..., A_{2n+1}. Итак, отрезки сторон, примыкающие к вершинам A_1 и A_{2n+1}, равны, т. е. $A_1B_{2n+1} = A_{2n+1}B_{2n+1}$. Следовательно, сторона A_1A_{2n+1} делится точкой касания пополам. Но таким же способом убедимся, что все стороны имеют точки касания с окружностью в серединах сторон. Соединим точки A_1, B_1 и A_2 с центром O. Очевидно, $\triangle OA_1B_1 = \triangle OA_2B_1$, и поэтому $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2B_1$. Так как OA_1 и OA_2 являются биссектрисами углов A_1 и A_2, то углы многоугольника при вершинах A_1 и A_2, а значит, и при всех, равны между собой. Но равносторонний и равноугольный многоугольник есть правильный.

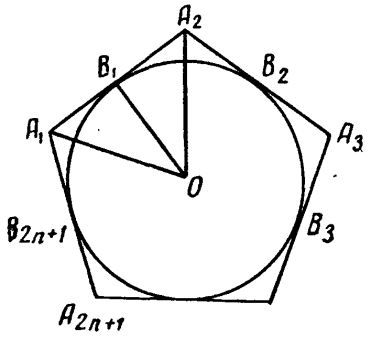


Рис. 102

876. Если из правильных одноименных многоугольников можно сложить паркет, то необходимо, чтобы внутренний угол такого многоугольника, повторенный несколько раз, дал полный угол, т. е. угол в 360°. Так как внутренний угол правильного многоугольника с n сторонами содержит число градусов, равное $\frac{180(n-2)}{n}$, то число $360 : \frac{180(n-2)}{n}$ должно быть натуральным. Определим из этого условия, каким должно быть n. Имеем

$$\frac{360n}{180(n-2)} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2} = 2 + k,$$

где $k = \frac{4}{n-2}$, $k(n-2) = 4$, $n = \frac{4}{k} + 2$.

Так как $0 < k < 4$, причем k — целое, то для того чтобы n было целым, k можно придать лишь значения делителей числа 4, т. е. 1, 2, 4. Это дает для n значения 6, 4, 3.

Итак, такими многоугольниками могут быть только квадраты, правильные треугольники и шестиугольники. Покажем, что этого и достаточно, т. е. что из указанных видов многоугольников действительно можно сложить паркет. Если провести систему равноотстоящих параллельных прямых и пересечь ее такой же системой прямых под углом 90°, то получится паркет, сложенный из квадратов. Если провести систему параллельных равноотстоящих прямых и пересечь ее такой же системой прямых под углом 60°, а в каждом из получившихся ромбов провести меньшую диагональ, то получим паркет из треугольников. Паркет из шестиугольников получится, если в паркете из треугольников объединять подходящим образом по шесть треугольников в один шестиугольник.

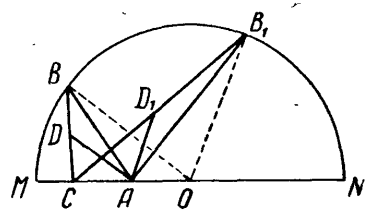


Рис. 103

877—884. Указание. Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется множество всех точек, обладающих этим свойством.

Чтобы доказать, что фигура l является геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, достаточно доказать две теоремы: 1) если точка обладает указанным свойством, то она принадлежит фигуре l; 2) если точка принадлежит фигуре l, то она обладает этим свойством.

В качестве образца подробного решения задачи на отыскание геометрического места может служить решение задачи 877.

877. I. Проведем прямую $BO \parallel AD$ (рис. 103) до пересечения ее с продолжением основания AC треугольника в точке O. Точка O делит отрезок AC внешним образом в отношении 2 : 1. Действительно, по свойству параллельных, пересекающих стороны угла, имеем $\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{BD} = \frac{2}{1} = 2$. Следовательно, точка O неподвижна для любого положения вершины B. Кроме того, $\frac{BO}{AD} = \frac{BC}{CD} = 2$, откуда видно, что вершина B в любом положении треугольника отстоит от неподвижной точки O на одно и то же расстояние $BO = 2AD$. Итак, вершина B находится на окружности радиуса $r = 2AD$ с центром в точке O, расположенном на продолжении стороны AC за вершину A на расстоянии $OA = AC$.

II. Возьмем любую точку B_1 на построенной окружности, отличную от точек M и N, и соединим ее с точками A, C и O. Проведем $AD_1 \parallel OB_1$. Отрезок AD_1 будет медианой треугольника

AB_1C. Действительно, по свойству параллельных линий, пересекающих стороны угла, имеем $\frac{B_1D_1}{C_1D_1} = \frac{OA}{AC} = 1$, так что $B_1D_1 = D_1C$. С другой стороны, $\frac{AD_1}{OB_1} = \frac{AC}{OC} = \frac{1}{2}$, $AD_1 = \frac{1}{2} OB_1 = AD$ и точка B_1 является вершиной рассматриваемых треугольников. Таким образом, найденная окружность, исключая точки M и N, и является искомым геометрическим местом.

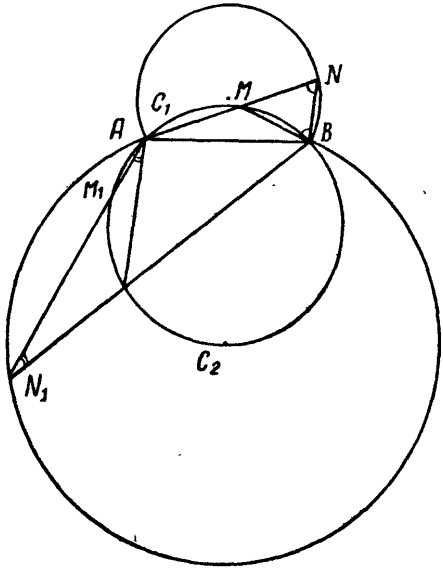


Рис. 104

878. Хорда AB делит окружность на две дуги: C_1 и C_2 (рис. 104). Для точек M, взятых на дуге C_1, геометрическим местом точек N будет дуга другой окружности, концы которой находятся в A и B, расположенная от хорды AB по ту же сторону, что и C_1. Вписанный в эту дугу угол, опирающийся на концы хорды AB, вдвое меньше аналогично вписанного в дугу C_1 угла. Для точек M_1, взятых на дуге C_2, искомым геометрическим местом будет дуга окружности, имеющая концы A и B, расположенная от AB с той же стороны, что и C_2, и вмещающая вписанный угол, опирающийся на концы хорды AB, вдвое меньший, чем аналогично вписанный в дугу C_2 угол.

879. а) Пусть вершина O (рис. 105) данного прямого угла XOY и вершина B прямого угла движущегося прямоугольного треугольника ABC расположены по разные стороны от гипотенузы AC. Так как $\angle ABC + \angle AOC = 180°$, то вокруг четырехугольника $ABCO$ можно описать окружность. Описав ее, видим, что при любом положении движущегося треугольника ABC угол AOB остается неизменным, потому что $\angle AOB = \angle ACB$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB. Следовательно, точка B находится на прямой ON, проходящей через вершину O данного прямого угла и наклоненной к стороне OY

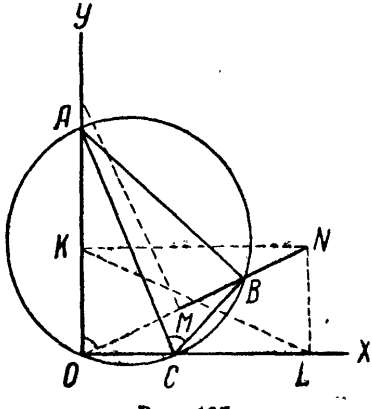


Рис. 105

этого угла под углом BOY, равным углу ACB треугольника. Самое близкое положение вершины B к точке O есть то положение M, когда гипотенуза будет лежать на прямой OY. Самое удаленное положение вершины B от точки O есть положение N, при котором катеты треугольника ABC параллельны сторонам угла XOY. Итак, при любом положении треугольника ABC, скользящего концами A и C по сторонам угла XOY, вершина B его прямого угла находится на отрезке MN. Справедливо и обратное утверждение, т. е. любая точка B, взятая на отрезке MN, является вершиной рассматриваемого прямоугольного треугольника в одном из его положений. Это легко доказать, построив окружность радиуса, равного половине гипотенузы данного треугольника, которая проходит через точки B и O.

Таким образом, искомое геометрическое место точек есть отрезок MN диагонали ON прямоугольника $OKNL$, стороны которого KN и NL равны соответственно катетам AB и BC треугольника и параллельны сторонам OX и OY угла XOY.

б) Пусть вершина O (рис. 106) данного прямого угла XOY и вершина B прямого угла движущегося треугольника ABC расположены по одну сторону от гипотенузы AC. В этом случае рассуждениями, сходными с предыдущими, легко убедиться в том, что геометрическое место вершин B прямоугольного треугольника ABC есть отрезок MN, направленный по диагонали прямоугольника со сторонами KL и LP, равными катетам AB и BC треугольника ABC, и параллельными сторонами OX и OY угла XOY. Этот прямоугольник расположен внутри угла, смежного с данным. Отрезок MN проходит через вершину O данного угла, а ограничивающие его точки M и N соответствуют тем положениям вершины B движущегося треугольника ABC, при которых гипотенуза лежит соответственно на сторонах OX и OY угла XOY.

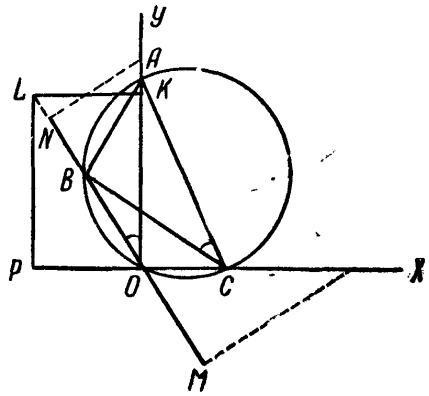


Рис. 106

880. Соединим точку M (рис. 107) касания окружностей с точками A и B и проведем общую касательную MN к окружностям в точке M, где N — точка пересечения прямых MN и AB. Так как в треугольнике AMB отрезки AN, NM и NB равны, как отрезки касательных, проведенных к окружностям из одной и той же точки N, то N есть центр окружности, описанной около треугольника AMB. Таким образом, при любых двух окружностях, удовлетворяющих условиям задачи, точка M будет находиться на окруж-

ности радиуса NM с центром в N. Легко доказать, что справедливо и обратное утверждение, а именно, любая точка M окружности радиуса $\frac{1}{2}AB$ с центром в N, отличная от точек A и B, является точкой касания некоторых двух окружностей, из которых одна касается прямой AB в точке A, а другая — в точке B.

Таким образом, искомым геометрическим местом будет окружность радиуса $\frac{1}{2}AB$ с центром в середине N отрезка AB, исключая точки A и B.

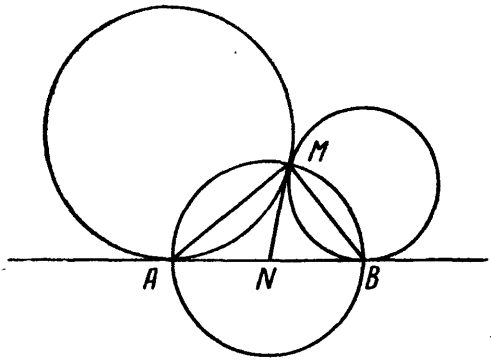


Рис. 107

881. а) Если прямые параллельны и расстояние между ними a больше данной постоянной величины b, то таких точек не существует. Если $a = b$, то все точки, заключенные между этими прямыми, а также точки этих прямых составят искомое геометрическое место точек. Если $a < b$, то геометрическим местом точек будут две прямые, параллельные данным и отстоящие от каждой данной на расстояния, равные $\frac{b+a}{2}$ и $\frac{b-a}{2}$.

б) Если прямые пересекаются, то, обозначив их NP и QL (рис. 108), проведем прямые AE и CF, параллельные NP и отстоящие от нее на данную постоянную величину b, а затем прямые BE и DF, параллельные прямой QL и отстоящие от нее на ту же величину b. Нетрудно видеть, что сумма расстояний любой точки K, взятой внутри прямоугольника $ABCD$, меньше b, а любой

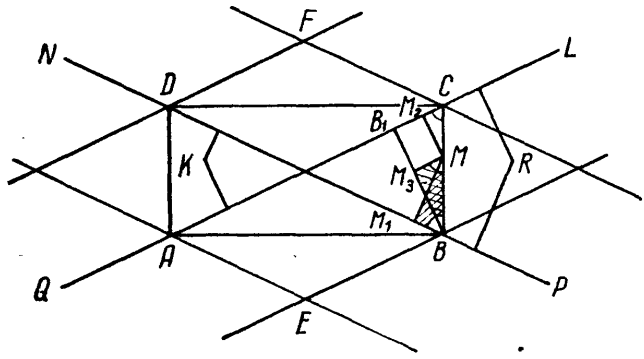


Рис. 108

точки R, взятой вне этого прямоугольника, больше b. Для точек же, лежащих на контуре прямоугольника $ABCD$, сумма расстояний равна b. На самом деле, возьмем любую точку M, например, на стороне BC прямоугольника. Пусть MM_1, MM_2 — расстояния от точки M до данных прямых NP, QL. Проведем $BB_1 \perp QL$, $MM_3 \perp BB_1$ Тогда $MM_1 + MM_2 = MM_1 + M_3B_1$. Но $\triangle MM_1B = \triangle MM_3B$, так как они прямоугольные с общей гипотенузой MB и равными углами MBM_1 и BMM_3, как равные одному и тому же углу BCB_1. Поэтому $MM_1 = M_3B$. Таким образом, получаем $MM_1 + MM_2 = M_3B + M_3B_1 = BB_1 = b$. Если возьмем точку на какой-либо другой стороне прямоугольника, то таким же способом докажем, что и для нее сумма расстояний до данных прямых равна b. Так как для точек, не находящихся на контуре прямоугольника, как было ранее сказано, эта сумма не равна b, то искомое геометрическое место есть контур построенного прямоугольника $ABCD$.

882. Пусть ABC — любая секущая данной окружности, проведенная из данной точки A (рис. 109), причем B и C — точки пересечения секущей и окружности. Пусть MB и MC — касательные к окружности. Проведем $MP \perp AO$ и соединим B и M с O. Обозначим точку пересечения MO и AC буквой N. Очевидно, $\triangle OMP \sim \triangle ONA$. Поэтому $OP : OM = ON : OA$ или $OP = \dfrac{OM \cdot ON}{OA}$. Но из треугольника OBM находим, что $OM \cdot ON = OB^2$. Следовательно, $OP = \dfrac{OB^2}{ON}$, а так как OB и OA данные величины, то это означает, что любая точка M проектируется на данную прямую OA в одну и ту же точку P. Следовательно, точка M находится на прямой, перпендикулярной прямой OA и отстоящей от центра данной окружности на величину $OP = \dfrac{OB^2}{OA}$.

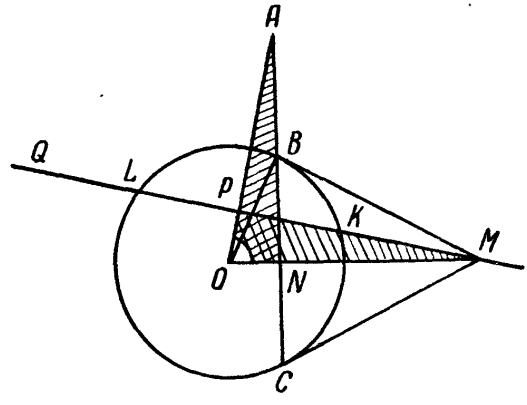


Рис. 109

Возьмем теперь любую точку M, находящуюся вне данной окружности и расположенную на прямой, перпендикулярной OA и отстоящей от центра O данной окружности на расстояние $OP = \dfrac{OB^2}{OA}$. Проведем касательные MB и MC к окружности из точки M и покажем, что прямая BC будет проходить через точку A. Предположим, что прямая BC пересечет прямую OA в некоторой точ-

ке A_1, а OM в точке N_1. Тогда, замечая, что треугольники OA_1N_1 и OMP подобны, и рассуждая далее так же, как в первой части доказательства, найдем, что $OP = \frac{OB^2}{OA_1}$. Но тогда $OA_1 = OA$, а это и означает, что точки A и A_1 совпадают или что прямая BC пройдет через точку A. Поэтому можно сказать, что искомое геометрическое место точек суть два луча KM и LQ, лежащие на прямой, перпендикулярной данной прямой OA и отстоящей от центра данной окружности на расстояние $OP = \frac{OB^2}{OA}$, причем точка P находится на отрезке OA, а не вне его.

883. Окружность, описанная вокруг треугольника ABC, исключая точки B и C.

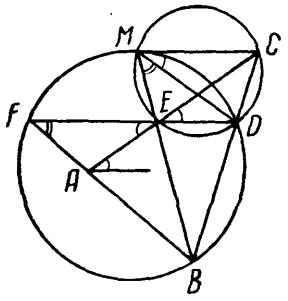


Рис. 110

Указание. Пусть точка M (рис. 110) принадлежит искомому геометрическому месту. Докажем, что угол BMC есть величина постоянная, равная углу CAB. Действительно, $\angle BMC = \angle BMD + \angle DMC$, $\angle BMD = BFD$ и $\angle DMC = \angle DEC$, как вписанные, опирающиеся на $\smile BD$ и $\smile CD$; $\angle CED = \angle FEA$, как вертикальные; наконец, $\angle CAB = \angle DFB + \angle FEA$ — по теореме о внешнем угле треугольника. Итак, $\angle CAB = \angle BMC$, а это и означает, что точка M лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Впрочем, возможно такое расположение точек E и F, что угол BMC будет не равен углу CAB, а будет дополнять его до 180°. Но и в этом случае точка M будет лежать на той же окружности.

884. Две прямые, параллельные биссектрисам смежных углов, образованных данными прямыми, и проходящие через точку O (рис. 111).

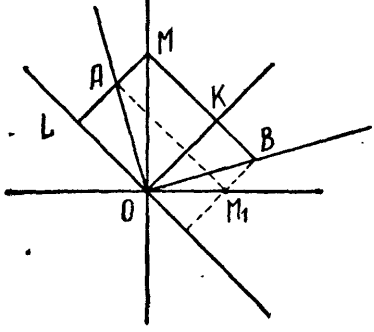


Рис. 111

Указание. Проведем через точку O прямые OK и OL, параллельные двум данным перпендикулярным прямым. Проведем $AM \parallel OK$ и $BM \parallel OL$, пересекающиеся в точке M. Пусть K есть точка пересечения BM и OK и L — точка пересечения AM и OL. Треугольники OAL и OKB равны, так как они прямоугольные, и $OA = OB$, а $\angle AOL = \angle KOB$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $OL = OK$ и точка M лежит

на биссектрисе угла LOK. Если бы проводить $AM_1 \parallel OL$ и $BM_1 \parallel OK$, то точка M_1 лежала бы на биссектрисе угла, смежного с углом LOK.

885. Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник и O — центр круга (рис. 112). Проведем AD, BE, CF и AE. Точка M_1 разделит радиус OF пополам. Это очевидно. Проведем BM_1. Точка M_2 разделит радиус OA в отношении $1:2$, как это видно из подобных треугольников BM_1C и M_2M_1O. Итак, $OM_2 = \frac{1}{3}R$. Проведем CM_2. Точка M_3 будет такая, что $OM_3 = \frac{1}{4}R$. Это видно из подобных треугольников CM_2D и M_3M_2O. Соединяя точки M_3 и D отрезком прямой, получим точку M_4 такую, что $OM_4 = \frac{1}{5}R$, и т. д.

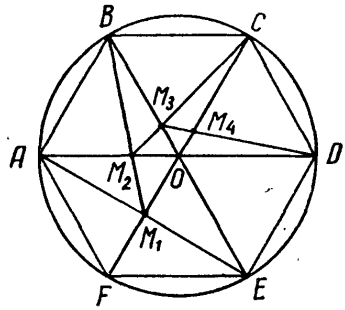


Рис. 112

886. а) Если данные точки A и B лежат на данной прямой CD, то любая точка M, лежащая на отрезке AB, будет искомая.

б) Если точка A лежит на прямой CD, а точка B — вне прямой (рис. 113), то точка A и есть искомая. Действительно, для любой точки M прямой CD, отличной от A, выполняется неравенство $AM + MB > AB$.

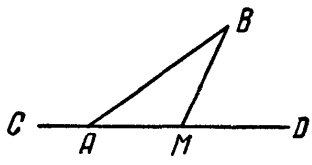


Рис. 113

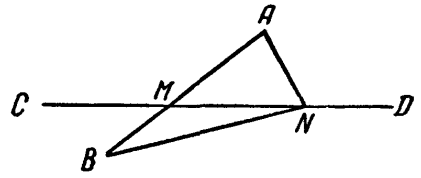


Рис. 114

в) Если A и B лежат по разные стороны от прямой CD (рис. 114), то точка M пересечения прямых AB и CD будет искомой. На самом деле, для любой другой точки N прямой CD будет $AN + NB > AB = AM + MB$.

г) Если точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD (рис. 115), то, построив точку A_1, симметричную с A относительно прямой CD, найдем искомую точку, как точку M пересечения прямых A_1B и CD. Очевидно, для любой другой точки N прямой

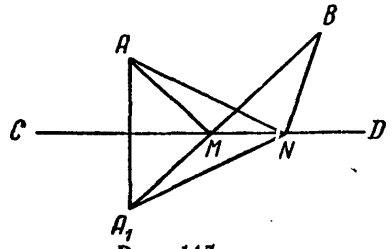


Рис. 115

CD будет выполняться соотношение: $NA + NB = NA_1 + NB > A_1B = A_1M + MB = MA + MB$.

887. Пусть точка A (рис. 116) лежит ближе к MN, чем к PQ. Проведем через B отрезок BE, равный и параллельный CD. Соединим точки E и A отрезком прямой и пусть S есть точка пересечения прямых EA и MN. Построив отрезок ST, равный и параллельный CD, где T — точка пересечения ST и PQ, найдем, что $AS + ST + TB$ — наименьшее и, следовательно, положение ST отрезка CD — искомое. Действительно, всякое иное положение S_1T_1 даст этой сумме значение больше найденного, так как $AS_1 + S_1T_1 + T_1B = AS_1 + BE + ES_1 = BE + (ES_1 + S_1A) > BE + EA = BE + ES + SA = ST + TB + AS$.

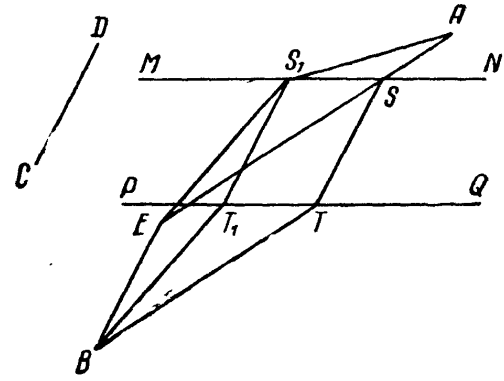


Рис. 116

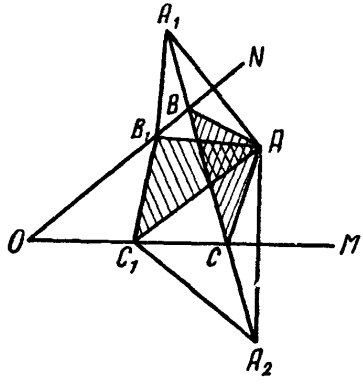


Рис. 117

888. Пусть треугольник AB_1C_1 (рис. 117) имеет вершины B_1 и C_1 на сторонах ON и OM угла MON, а третью в данной точке A. Построим точки A_1 и A_2, симметричные точке A соответственно относительно ON и OM, и соединим отрезками A_1 и B_1, а затем — A_2 и C_1. Периметр треугольника AB_1C_1 равен периметру ломаной $A_1B_1C_1A_2$. Он больше отрезка A_1A_2. Отсюда следует, что наименьший периметр будет иметь тот из треугольников рассматриваемого вида, у которого вершины будут в точках A, B и C, где B и C — точки пересечения прямой A_1A_2 с прямыми ON и OM. Из способа построения ясно, что решение будет единственное.

889. а) Пусть данные точки A, B и C (рис. 118) не лежат на одной прямой. Предположим, что задача решена и прямые AD,

BF и EC — искомые. Так как BF должна делить расстояние между прямыми AD и CE пополам, то BF должна пройти через середину F отрезка AC. Отсюда следует, что одну прямую нужно направить по медиане BF треугольника ABC, а две другие провести через точки A и C параллельно ей.

В этом случае задача имеет три решения (три медианы).

б) Если точки лежат на одной прямой и две из них симметричны относительно третьей, то любые параллельные прямые, проходящие через эти точки, будут искомыми. Если же расстояния между соседними точками не равны, то задача не имеет решения.

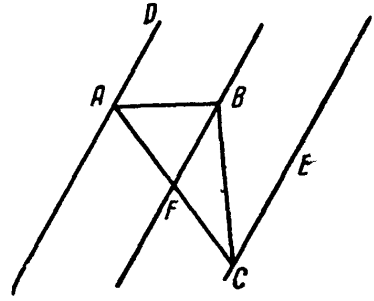


Рис. 118

890. Пусть AB — диаметр окружности, а O — ее центр (рис. 119). Проведем $AC \perp AB$ и отложим $AC = AB$. Соединим C и O отрезком прямой. Если D — точка пересечения CO с окружностью, то касательная MD к окружности в точке D пересечет продолжение диаметра AB в искомой точке M. Действительно, $\triangle OCA = \triangle OMD$, так как $OA = OD$, а $\angle AOD$ — общий. Отсюда $DM = AC = AB$.

891. Искомые окружности должны точками касания D, E и F (рис. 120) разбить стороны треугольника на отрезки $AD = AF$, $BD = BE$, $CE = CF$. Учитывая, что отрезки касательных, проведенных из одной и той же точки к окружности, равны, делаем вывод, что точки D, E и F будут точками касания сторон треугольника с окружностью, вписанной в этот треугольник. Отсюда ясно, что задача решится просто, если в треугольник ABC вписать окружность.

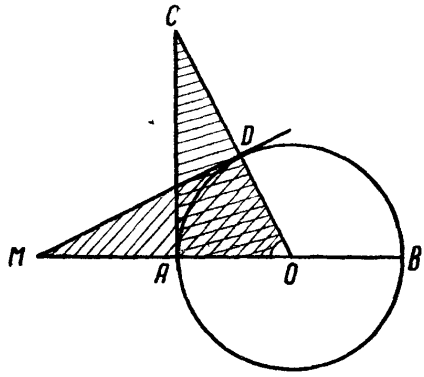


Рис. 119

892. Построим по гипотенузе $c = AB$ и катету $h_b = BD$ прямоугольный $\triangle ABD$ (рис. 121). Проведем $BM \parallel AD$ и засечем BM дугой окружности радиуса $AM = 2m_a$ с центром в точке A. Через найденную точку M проведем $CM \parallel AB$ до пересечения с прямой AD в точке C. Точка C будет третьей вершиной искомого $\triangle ABC$. Если $2m_a = h_b$ или $2m_a = c$, то решение будет единственное. Если $2m_a > h_b$, но не равно c, то два решения. Если $2m_a < h_b$ или $h_b \leqslant c$, то задача не имеет решения.

893. Проведем биссектрисы внутренних углов треугольника, име-

ющего вершины в данных точках. Проведем через каждую вершину этого треугольника прямую, перпендикулярную биссектрисе этого угла. Построенные таким образом три прямые образуют треугольник, который и будет искомым (см. задачу 844).

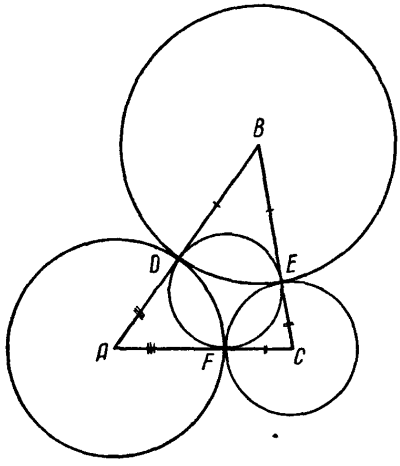


Рис. 120

894. На продолжении радиуса OA (рис. 122) меньшей окружности отложим отрезок $AB = OA$. На отрезке AB, как на диаметре, опишем окружность, и пусть точка пересечения ее с большей окружностью есть C. Секущая CA и есть искомая. Действительно, из подобных треугольников O_1CA и OAD видно, что $AC = \frac{1}{2} AD$, а из равных треугольников OCA и OED, что $AC = ED$. Если радиус большей окружности больше диаметра меньшей, то задача не имеет решения.

895. Через данную точку M (рис. 123) проведем прямую OM, проходящую через вершину O данного $\angle AOB$. Возьмем на стороне OB любую точку K, опустим из нее на OA перпендикуляр KL и из точки K, как из центра, дугой радиуса KL засечем прямую OM в точке N. Если теперь провести $MP \parallel NK$ до пересечения с OB в точке P, то точка P и будет искомая. Действительно, проведя $PR \perp OA$, видим, что $\frac{OP}{OK} = \frac{PR}{KL} = \frac{PM}{KN}$, а так как $KL = KN$, то $PR = PM$. На той же стороне найдется и еще одна точка, удовлетворяющая условиям задачи,— это точка пересечения стороны OB с прямой, проходящей через точку M параллельно прямой KN_1.

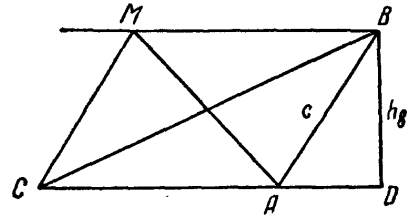


Рис. 121

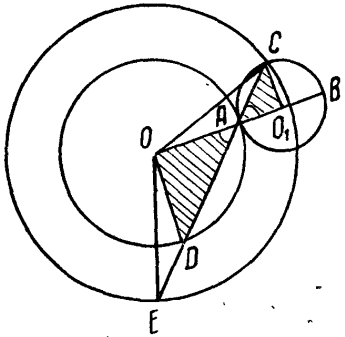


Рис. 122

Если угол прямой или тупой, то точка P найдется так: соединяем вершину O угла AOB (рис. 124) с точкой M отрезком прямой OM и проводим $PL \perp OM$ через середину L

отрезка OM. Точка P пересечения прямых OB и PL и будет искомая. В случае прямого угла такая точка будет единственная на стороне OB. Если угол тупой, то такая точка на стороне OB либо найдется одна, либо ее не будет. Последнее, очевидно, будет в том случае, когда точка M находится внутри угла AOX или на его границах, причем здесь $OX \perp OB$.

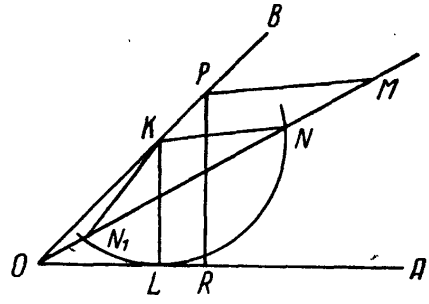


Рис. 123

Замечание. Расстоянием от точки P до луча OA является длина отрезка OP, а не длина отрезка PK, перпендикулярного к прямой OA. Длина PK есть расстояние до прямой OA, а не до луча OA.

896. Проведем радиус OD (рис. 125), перпендикулярный хорде AB, являющейся основанием сегмента. Пусть C есть точка пересечения OD и AB. Построим любой квадрат $MNPQ$, симметричный относительно OD, сторона которого MN лежит на AB. Проведем прямую CQ до пересечения с дугой сегмента в точке S и прямую CP, пересекающую дугу в точке R. Из точек S и R опустим перпендикуляры на AB и пусть основания их T и L. Точки S, R, L и T будут вершинами искомого квадрата. Доказательство правильности построения легко привести, если рассмотреть следующие три пары подобных треугольников: CST и CQM; CRL и CPN; CSR и CQP.

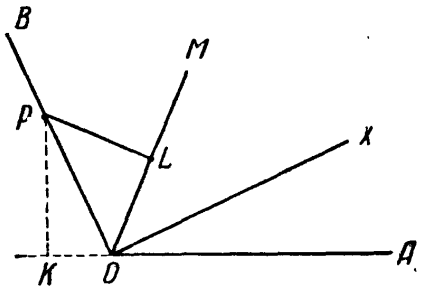


Рис. 124

Решение задачи единственное, если дуга сегмента $\alpha \leqslant 270°$. При $\alpha > 270°$ задача не имеет решения.

897. Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 126) построен такой отрезок MN, параллельный AD, что $MK = KL = LN$. Проведем прямую CL до пересечения ее с большим основанием AD в точке P. Так как $KN = 2 \cdot LN$, то $AD = 2 \cdot PD$. Следовательно, P есть середина отрезка AD. Отсюда вытекает, что для постро-

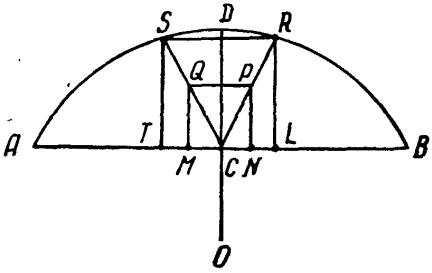


Рис. 125

ения искомого отрезка достаточно провести прямую, параллельную основаниям трапеции через точку пересечения диагонали и прямой, соединяющей середину одного основания с концом другого. Искомый отрезок определится точками пересечения проведенной прямой с боковыми сторонами трапеции. Доказательство правильности построения легко получится, если рассмотреть две пары следующих треугольников: ACP и PCD, а затем ABC и DCB.

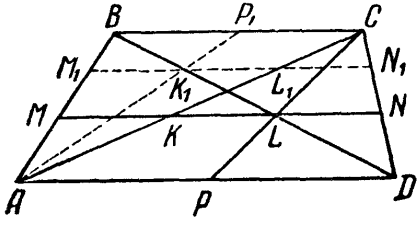


Рис. 126

Задача имеет два решения (см. пунктир на рис. 126).

898. Пусть A и B — данные точки, а MN — данная прямая.

а) Если точки A и B лежат по разные стороны от прямой MN или на прямой MN, то задача не имеет решения.

б) Если $AB \parallel MN$, то существует только одно решение. В этом случае искомая окружность проходит через основание перпендикуляра, опущенного из середины отрезка AB на MN.

в) Если A и B (рис. 127) лежат по одну сторону от прямой MN и прямая AB пересекает MN в некоторой точке C, то искомая окружность проходит через такую точку D прямой MN, для которой CD есть средняя пропорциональная между AC и BC (см. задачу 851). В этом случае задача имеет два решения.

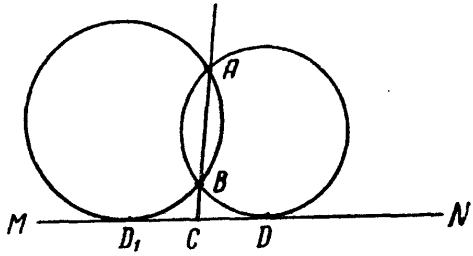


Рис. 127

г) Если точка A или точка B, но не обе одновременно, лежат на MN, то решение единственное.

899. Продолжим боковые стороны AD и BC (рис. 128) данной трапеции $ABCD$ до их пересечения в точке M и проведем через нее и точку O пересечения диагоналей прямую MK, пересекающую основания трапеции в точках L и K. Эта прямая разделит трапецию на равновеликие фигуры. Действительно, прямая MK точками L и K делит основания трапеции на равные части, откуда и следует равновеликость трапеций $ADLK$ и $KLCB$. Для доказательства того, что K и L — середины оснований, проведем медиану треугольника AMB, выходящую из вершины M. Эта медиана разделит пополам и основание DC.

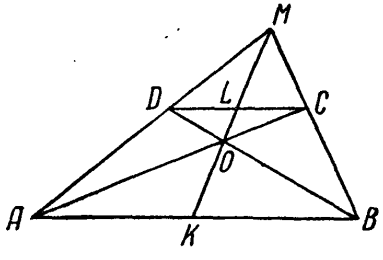


Рис. 128

Но прямая, проходящая через середины оснований трапеции, проходит и через точку пересечения ее диагоналей (см. задачу 859). Следовательно, проведенная медиана совпадает с прямой MK, а точки L и K делят основания трапеции пополам.

900. Проведем любую прямую MF (рис. 129) через точку O пересечения диагоналей данного параллелограмма $ABCD$, не параллельную его сторонам. Она разделит параллелограмм на две равновеликие трапеции $ADEF$ и $FECB$, где E и F — точки пересечения прямой MF с противоположными сторонами параллелограмма. Продолжив сторону AD параллелограмма до пересечения ее с прямой MF в точке M, проведем прямую MK через точку M и точку N пересечения диагоналей трапеции $ADEF$, где K — точка пересечения прямых MK и AB. Проведем прямые KE и DF и через точку T их пересечения прямую MP. Прямая MP и разделит площадь параллелограмма $ABCD$ в отношении 1 : 2. Для доказательства проведем через точку T отрезок $QR \parallel AB$, где Q и R — точки пересечения его с боковыми сторонами трапеции $ADEF$. Так как K — середина отрезка AF (см. задачу 899), то $QT : TR = 2 : 1$ (см. задачу 897), а следовательно, и $AP : PF = DL : LE = 2 : 1$. Но тогда площадь трапеции $ADLP$ равна $\frac{2}{3}$ площади трапеции $ADEF$ или $\frac{1}{3}$ площади параллелограмма $ABCD$.

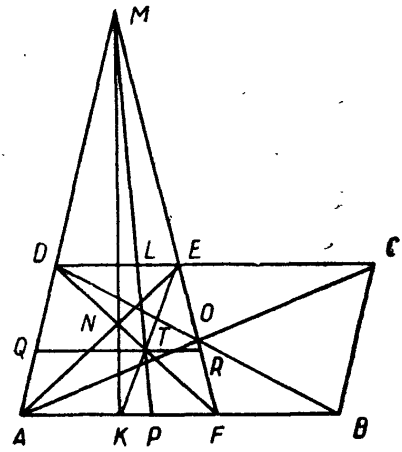


Рис. 129

901. На основании AC данного треугольника ABC отложим отрезок AD, равный данному основанию треугольника, который нужно построить. Проведем $CK \parallel BD$ до пересечения с прямой AB в точке K. Эта точка и будет третьей вершиной искомого треугольника. Доказательство следует из равенства площадей треугольников KBD и BCD.

902. а) Если прямая AB, проходящая через данные точки A и B, не параллельна и не перпендикулярна данной прямой CD, то для точки пересечения прямой CD с перпендикуляром к отрезку AB в его середине выражение $|AM - MB|$ будет иметь наименьшее значение, равное нулю, а для точки пересечения прямых AB и CD — наибольшее, равное длине отрезка AB.

б) Если прямая AB параллельна прямой CD, то точка M, для которой $|MA - MB|$ имеет наименьшее значение, является основанием перпендикуляра, опущенного из середины отрезка AB на CD.

Этот минимум равен нулю. Такой точки на прямой CD, для которой $|AM - MB|$ было бы наибольшим, не существует.

в) Если AB перпендикулярна CD, то наибольшее значение $|AM - MB|$ будет для точки пересечения AB с CD. Это значение равно длине отрезка AB. Такой точки M на прямой CD, для которой $|AM - BM|$ имело бы наименьшее значение, не существует.

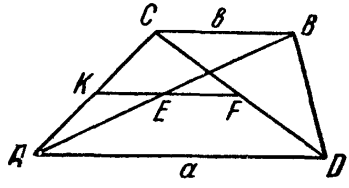


Рис. 130

903. Пусть E и F будут середины диагоналей AB и CD (рис. 130). Проведем через точку F прямую, параллельную основаниям трапеции, до пересечения ее с боковой стороной AC в точке K. Очевидно, KF будет средней линией $\triangle ACD$ и она пройдет через точку E, так что KE будет средней линией $\triangle CAB$. По свойству средней линии треугольника можно написать $EF = KF - KE = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{a-b}{2}$.

904. Нужно найти периметр $\triangle DCE$ (рис. 131). Отрезки касательных, проведенных из одной и той же точки к одной и той же окружности, равны. Поэтому $DM = DK$, $EM = EL$, $BK = BN$, $AL = AN$, а искомый периметр $2p = CD + DE + CE = CD + DM + ME + CE = CD + (DK + EL) + CE = (CD + DK) + (CE + EL) = CK + CL = (CB - BK) + (CA - AL) = CB + CA - (BK + AL) = a + b - (BN + AN) = a + b - BA = a + b - c$.

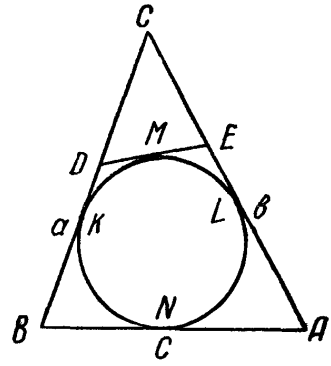


Рис. 131

905. Положим: $AD = mx$, $DB = nx$, $CE = py$, $BE = qy$ (рис. 132). Тогда $AB : BC : CA = (mx + nx) : (py + qy) : (mx + py)$. Но по свойству отрезков касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки, $DB = BE$ или $nx = qy$. Отсюда $\frac{x}{q} = \frac{y}{n}$ и, следовательно,

$$AB : BC : CA = (mq + nq) : (pn + qn) : (mq + pn) = q(m + n) : n(p + q) : (mq + pn).$$

906. Пусть радиус искомой окружности есть $OK = x$ (рис. 133). Из треугольников O_2O_1O и O_1OO_3, пользуясь теоремой о квадрате стороны треугольника, получим

$$\begin{cases}(R+x)^2=(R+r-x)^2+r^2+2ry;\\ (r+x)^2=(R+r-x)^2+R^2-2Ry,\end{cases}$$

где $y=O_1A$ — проекция общей стороны на данный отрезок. Умножив первое уравнение на R, а второе — на r и сложив результаты получим:

$$(R+x)^2R+(r+x)^2r=(R+r-x)^2(R+r)+r^2R+rR^2;$$
$$R^3+2(R^2+r^2)x+(R+r)x^2+r^3=(R+r)^3-2(R+r)^2x+(R+r)x^2+rR(R+r);\ 2x[r^2+R^2+(R+r)^2]=$$
$$=(R+r)^3-R^3-r^3+rR(R+r),\ 4x(R^2+Rr+r^2)=$$
$$=3Rr(R+r)+Rr(R+r),\ 4(R^2+Rr+r^2)x=$$
$$=4Rr(R+r),\ x=\frac{Rr(R+r)}{R^2+Rr+r^2}.$$

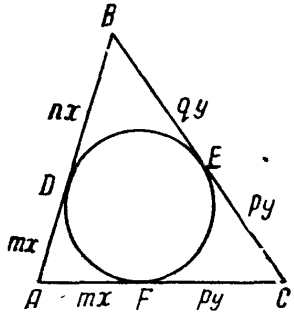


Рис. 132

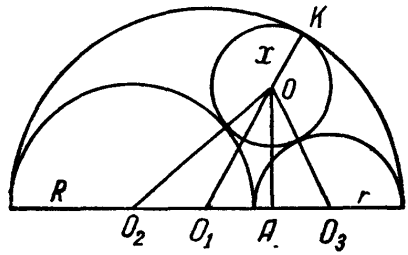


Рис. 133

907. Обозначим S_1 искомую площадь $\triangle KLR$ (рис. 134). Соединим точки B и K отрезком прямой BK и составим отношение площадей треугольников CKB и AKC, которые будем обозначать соответственно S_2 и S_3. Получим $S_2:S_3=KC\cdot BQ:KC\cdot AT=BQ:AT$. Но $\triangle BQM\sim\triangle ATM$, поэтому $BQ:AT=BM:MA=4:1$. Отсюда $S_2:S_3=4:1$. Обозначим S_4 площадь $\triangle AKB$ и составим отношение площадей S_4 и S_3. Получим $S_4:S_3=BD\cdot AK:CE\cdot AK=BD:CE$, а так как $BD:CE=BN:NC=1:4$ в силу подобия треугольников BDN и CEN, то $S_4:S_3=1:4$. Складывая равенства $\frac{S_2}{S_3}=4$ и $\frac{S_4}{S_3}=\frac{1}{4}$ и прибавляя по 1 к обеим частям нового равенства, получим:

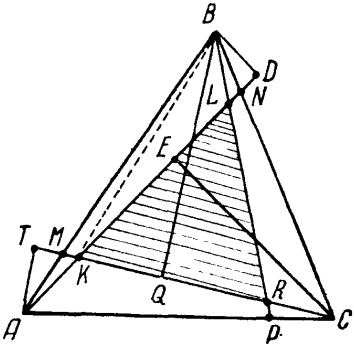


Рис. 134

$$\frac{S_2+S_3+S_4}{S_3}=4+\frac{1}{4}+1;\ \frac{S}{S_3}=\frac{21}{4};\ S_3=\frac{4}{21}S.$$

Но рассуждения, проведенные относительно $\triangle AKC$, могут быть применены и к треугольникам CRB и ALB, так что площади последних также равны $\frac{4}{21}S$ каждая. Отсюда $S_1 = S - 3 \cdot \frac{4}{21}S = S - \frac{4}{7}S = \frac{3}{7}S$.

908. $\triangle MOC$ и $\triangle QOM$ (рис. 135) — прямоугольные с общим углом MOQ. Поэтому они подобны и можно написать $MQ : MO = MC : OC$. Отсюда $MN = 2 \cdot MQ = 2 \cdot \frac{MC \cdot MO}{OC}$. Но $MO = R$, где R—радиус вписанного в $\triangle ABC$ круга;

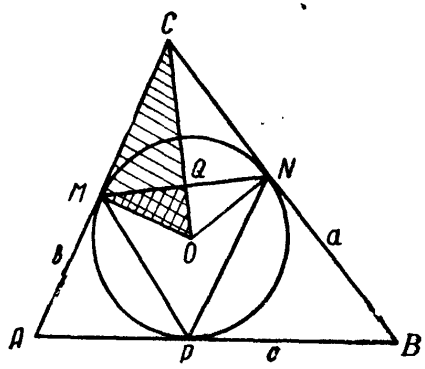


Рис. 135

$$MC = \frac{MC + CN}{2} = \frac{b - AM + a - NB}{2} = \frac{a + b - (AM + NB)}{2} =$$

$$= \frac{a + b - (AP + PB)}{2} = \frac{a + b - c}{2} = \frac{(a + b + c) - 2c}{2} = \frac{2p - 2c}{2} =$$

$= p - c$, где p — полупериметр $\triangle ABC$;

$$OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \sqrt{R^2 + (p - c)^2}.$$

Следовательно,

$$MN = \frac{2R(p - c)}{\sqrt{R^2 + (p - c)^2}}, \text{ где } R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}.$$

Аналогично найдем:

$$MP = \frac{2R(p - a)}{\sqrt{R^2 + (p - a)^2}}; \quad NP = \frac{2R(p - b)}{\sqrt{R^2 + (p - b)^2}}.$$

909. Пусть $\triangle MNP$ (рис. 136) есть тот, периметр которого требуется определить. Начнем с определения стороны MN. Для этого обратимся к треугольникам MNC и ABC. Они подобны, так как у них угол C общий, а стороны, заключающие этот угол, пропорциональны. Последнее утверждение следует из подобия прямоугольных треугольников AMC и BNC, так что, действи-

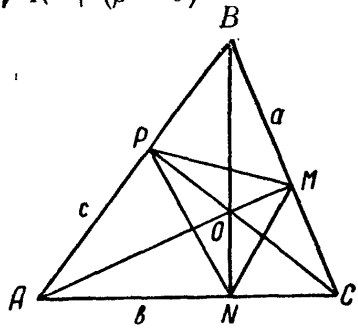


Рис. 136

тельно, $\frac{MC}{NC}=\frac{AC}{BC}$. Из подобия треугольников MNC и ABC имеем $\frac{MN}{R_1}=\frac{c}{R}$ или $MN=\frac{cR_1}{R}$, где R_1 и R — радиусы окружностей, описанных вокруг этих треугольников. Радиус R мы можем считать известным, так как он вычисляется по формуле $R=\frac{abc}{4S}$, а $R_1=\frac{OC}{2}$, потому что окружность, описанная около треугольника MNC, пройдет через O ($\angle OMC+\angle ONC=180°$), причем OC — диаметр ($\angle OMC=90°$).

Итак,

$$MN=\frac{cR_1}{R}=\frac{c\cdot OC}{2R}=\frac{c(PC-PO)}{2R}=\frac{c\cdot PC-c\cdot PO}{2R}=$$
$$=\frac{2S-2S_1}{2R}=\frac{S-S_1}{R},$$

где S_1 — площадь $\triangle ABO$. Аналогично получим

$$NP=\frac{S-S_2}{R}\text{ и }PM=\frac{S-S_3}{R},$$

где S_2 и S_3 — площади треугольников BCO и ACO. Следовательно,

$$2p=MN+NP+PM=\frac{3S-(S_1+S_2+S_3)}{R}=$$
$$=\frac{3S-S}{R}=\frac{2S}{R}=\frac{8S^2}{abc}.$$

910. Положим $AC=a$, $BC=b$ (рис. 137). Получим $2r=CD+CE=AC-AD+CB-BE=AC-AF+CB-BF=a+b-(AF+FB)=a+b-2R=\sqrt{(a+b)^2}-2R=\sqrt{a^2+b^2+2ab}-2R=\sqrt{4R^2+4S}-2R$.

Отсюда $r=\sqrt{R^2+S}-R$.

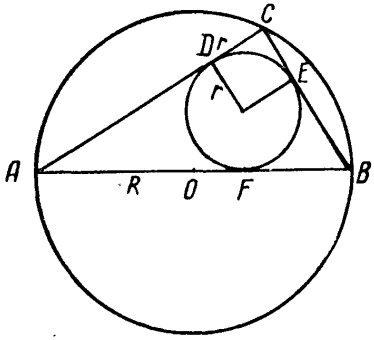


Рис. 137

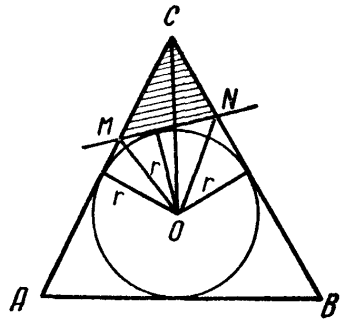


Рис. 138

911. Нужно найти площадь S треугольника MCN (рис. 138). Зная стороны треугольника ABC, легко найти и радиус вписанной в него окружности. Поэтому будем считать его известным и обозначим буквой r. Как видно из рисунка,

$$S = S_{MCO} + S_{NCO} - S_{MNO} = \frac{1}{2} MC \cdot r + \frac{1}{2} NC \cdot r - \frac{1}{2} MN \cdot r =$$

$$= \frac{1}{2} (MC + NC - MN)r = \frac{1}{2} (MC + NC + MN - 2MN)r =$$

$$= \frac{1}{2} (2p - 2a)r = (p - a)r,$$

где $2p$ — периметр $\triangle MCN$. Этот периметр $2p = k + l - m$ (см. решение задачи 904).

Замечание. Рассматриваемая окружность, вписанная в $\triangle ABC$, по отношению к $\triangle MCN$ называется вневписанной. У любого треугольника таких окружностей три. Если стороны треугольника a, b и c, а радиусы соответствующих вневписанных окружностей r_a, r_b и r_c, то, как показывает решение этой задачи, имеют место формулы: $S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$.

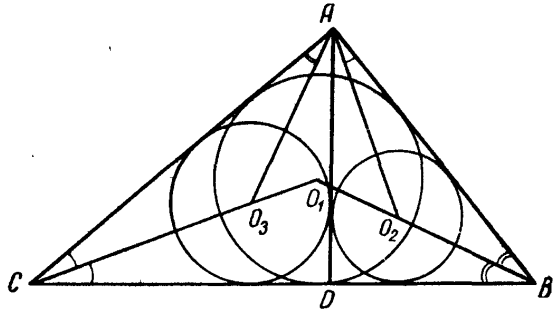


Рис. 139

912. Пусть O_1, O_2 и O_3 (рис. 139) — центры кругов, вписанных в данный $\triangle ABC$, в $\triangle ABD$ и в $\triangle CDA$, где D — основание перпендикуляра AD, опущенного из A на BC. Так как $\triangle ABO_2 \sim \triangle BCO_1$ и $\triangle BCO_1 \sim \triangle ACO_3$, то $r_1 : R = AB : BC$ и $r_2 : R = AC : CB$. Отсюда: $\frac{r_1^2}{R^2} = \frac{AB^2}{BC^2}$; $\frac{r_2^2}{R^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$ или $\frac{r_1^2 + r_2^2}{R^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} =$

$$= \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

Итак,

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2; \quad R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

913. Обозначим буквой S площадь $\triangle ABC$ (рис. 140). Соединив центры O и O_1 с точками касания и положив $\angle DOE=\alpha$, замечаем, что $\angle FO_1K=90°-\alpha$. Поэтому получим

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot CB=\frac{1}{2}(R+AE)(r+BF)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(R+R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left[r+r\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}Rr\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}Rr\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=Rr.$$

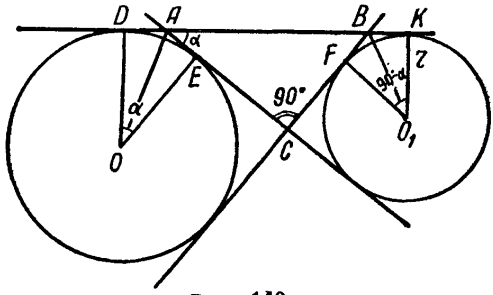


Рис. 140

914. $\triangle DME\sim\triangle AMC$, $\triangle DNE\sim\triangle CNB$, $\triangle MNE\sim\triangle ACE$ (рис. 141). Отсюда получаем:

$$\frac{AC}{a}=\frac{h_1}{h};$$

$$\frac{CB}{a}=\frac{h_1}{h};\quad\frac{AC}{b}=\frac{h_1+h}{h};$$

$$\frac{AC}{b}-\frac{AC}{a}=\frac{h_1+h}{h}-\frac{h_1}{h}=1;$$

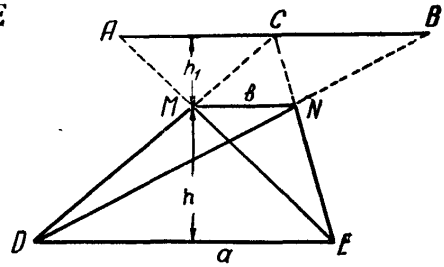


Рис. 141

$$AC=\frac{ab}{a-b}.$$

Но из $\frac{AC}{a}=\frac{h_1}{h}$ и $\frac{CB}{a}=\frac{h_1}{h}$ находим, что $AC=BC$ и, следовательно, $AB=AC+CB=2AC=\frac{2ab}{a-b}$.

915. Из подобия треугольников ACD и AKO (рис. 142) $\frac{y}{a} = \frac{h_1}{h_1+h_2}$. Из подобия треугольников ACB и KCO $\frac{y}{b} = \frac{h_2}{h_1+h_2}$. Отсюда $\frac{y}{a}+\frac{y}{b} = \frac{h_1}{h_1+h_2}+\frac{h_2}{h_1+h_2} = 1$ и $y = \frac{ab}{a+b}$.

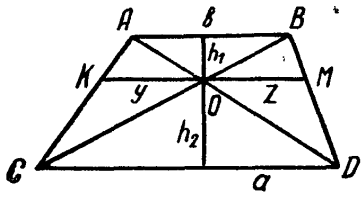


Рис. 142

Аналогично $z = \frac{2ab}{a+b}$. Складывая, получим $KM = y + z = \frac{2ab}{a+b}$.

916. $O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2$ или, обозначая искомый радиус буквой x, получим $(R+x)^2 = (R-x)^2 + O_2A^2$; $O_2A^2 = (R+x)^2 - (R-x)^2 = 4Rx$ (рис. 143). Аналогично: $OO_2^2 = O_2B^2 + OB^2 = O_2B^2 + O_2A^2$ или $(R-x)^2 = x^2 + 4Rx$; $R^2 - 2Rx + x^2 = x^2 + 4Rx$; $R^2 = 6Rx$; $x = \frac{R}{6}$.

917. Из прямоугольного $\triangle ABD$ (рис. 144)

$$AB^2 = BD^2 - AD^2 = (r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2 = 4r_1r_2.$$

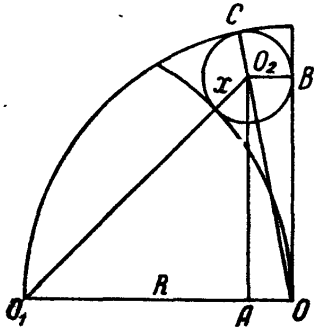


Рис. 143

Проведем касательную к окружности в точке C и продолжим ее до пересечения с AB в точке E. Соединим точки E и O_1 отрезком прямой. Так как $AE = EC = EB = \sqrt{r_1r_2}$ по свойству касательных, проведенных из одной точки, то $\triangle O_1AE = \triangle O_1EC$, $\angle AO_1E = \angle CO_1E$, и, следовательно, прямоугольные треугольники O_1AF и O_1EC подобны. Поэтому

$$\frac{AF}{AO_1} = \frac{EC}{O_1E}.$$ Но $AO_1 = r_1$; $EC = \sqrt{r_1r_2}$;

$$O_1E = \sqrt{O_1C^2 + CE^2} = \sqrt{r_1^2 + r_1r_2}$$ и $$AF = AO_1 \cdot \frac{EC}{O_1E} = r_1 \cdot \frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1^2+r_1r_2}} = r_1 \cdot \sqrt{\frac{r_2}{r_1+r_2}},$$

$$AC = 2AF = 2r_1\sqrt{\frac{r_2}{r_1+r_2}}.$$

Аналогично получим $BC = 2r_2 \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}$. Кроме того, ранее было найдено $AB^2 = 4r_1r_2$, так что $AB = 2\sqrt{r_1r_2}$.

918. Проведем $CD \perp AB$, $BF \parallel O_1O_2$ и $EC \perp O_1O_2$ (рис. 145). Получившиеся при этом треугольники ABF и DEC подобны, как треугольники с перпендикулярными сторонами. Поэтому можно написать $\frac{CD}{CE} = \frac{AB}{BF}$. Но $AB = 2\sqrt{Rr}$, $CE = \sqrt{Rr}$ (см. решение задачи 917), $BF = R + r$. Отсюда

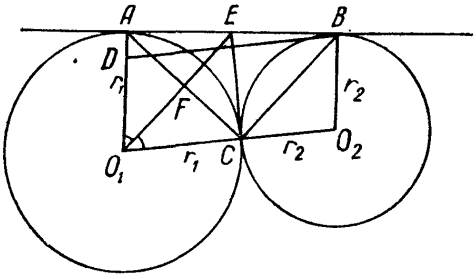


Рис. 144

$$CD = CE \cdot \frac{AB}{BF} = \sqrt{Rr} \cdot \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r} = \frac{2Rr}{R+r}.$$

919. Проведем $BC \parallel O_1O_2$ (рис. 146). Тогда из треугольника ABC по теореме Пифагора получим

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} =$$

$$= \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Проведем теперь $DE \parallel O_1O_3$. Из прямоугольного треугольника ADE получим

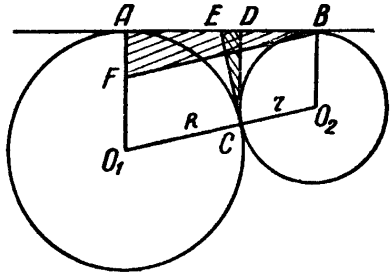


Рис. 145

$$AD = \sqrt{ED^2 - AE^2} = \sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} = 2\sqrt{Rx},$$

где x — искомый радиус. Наконец, проведем $DF \parallel O_2O_3$, тогда из $\triangle DBF$ получим

$$DB = \sqrt{DF^2 - BF^2} = \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} = 2\sqrt{rx}.$$

Но

$$AB = AD + DB \text{ или } 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx};$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}}; \quad x = \frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}.$$

Есть и еще одна окружность, которая касается данных окружностей снизу, а прямой — правее обеих данных окружностей. Ее радиус равен $\frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$.

920. Проведем $O_3E \perp O_1O_2$, $O_3F \perp AB$ и соединим прямой центр O_3 с концом A искомого отрезка AB (рис. 147). Очевидно,

$$AB=2AF=2\sqrt{AO_3^2-FO_3^2}=2\sqrt{c^2-x^2},$$

где $x=O_3F=DE$.

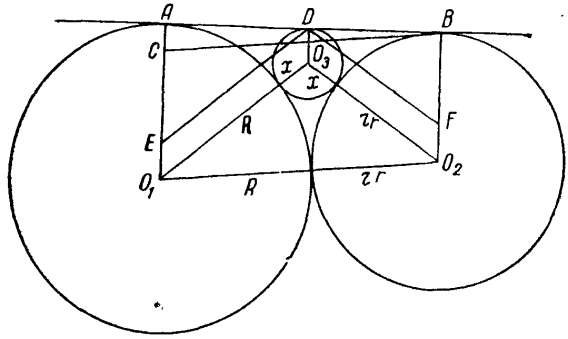


Рис. 146

Чтобы найти x, рассмотрим треугольники O_1O_3E и O_2O_3E, имеющие общий катет O_3E. На основании теоремы Пифагора получим

$$O_3E^2=O_3O_1^2-O_1E^2=O_3O_2^2-O_2E^2.$$

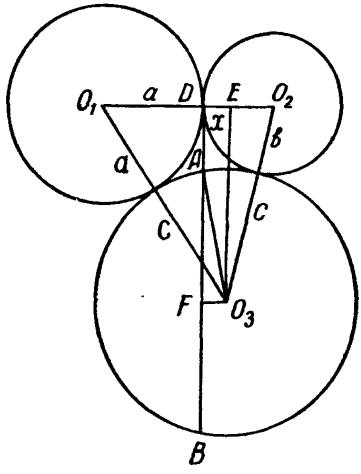


Рис. 147

Отсюда

$$(c+a)^2-(a+x)^2=(b+c)^2-(b-x)^2;\quad (a+x)^2-(b-x)^2=(a+c)^2-(b+c)^2;\quad (a+b)(a-b+2x)=(a+b+2c)(a-b);$$

$$a^2-b^2+2x(a+b)=a^2-b^2+2c(a-b);$$

$$2x(a+b)=2c(a-b);\quad x=c\cdot\frac{a-b}{a+b};\quad AB=2\sqrt{c^2-x^2}=$$

$$=2\sqrt{c^2-c^2\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}=2c\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2}}=4c\frac{\sqrt{ab}}{a+b}.$$

921. Проведем $OC \perp BE$, где O — центр окружности, и соединим прямыми O с вершиной A данного квадрата и с вершиной B — вписанного (рис. 148). Обозначим искомую сторону через x. Из прямоугольного треугольника OBC имеем

$$OB^2 = BC^2 + OC^2 = BC^2 + (OD + DC)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2.$$

Но $OB = OA$, и из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AO^2 = OD^2 + DA^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Теперь получим:

$$\frac{a^2}{2} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2; \quad \frac{a^2}{2} = \frac{x^2}{4} + \frac{a^2}{4} + ax + x^2;$$

$$5x^2 + 4ax - a^2 = 0; \quad x = \frac{a}{5}.$$

922. Таких окружностей три (одна с центром в O_3, а две другие изображены на рис. 149 пунктиром). Обозначим искомый радиус буквой x, а центры данных окружностей буквами O_1 и O_2. Соединим прямыми O_3 с O_1 и O_2 и опустим из O_3 перпендикуляр O_3A на линию O_1O_2. Рассмотрим прямоугольные треугольники O_1O_3A и O_2O_3A, имеющие общий катет O_3A. На основании теоремы Пифагора получим

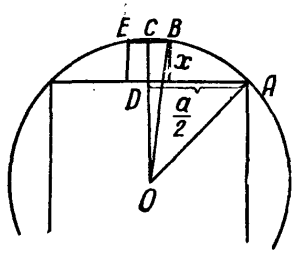


Рис. 148

$$O_3A^2 = O_1O_3^2 - O_1A^2 = O_2O_3^2 - O_2A^2 \text{ или иначе}$$

$$(R + x) - (R + 2r - x)^2 = (r + x)^2 - (x - r)^2.$$

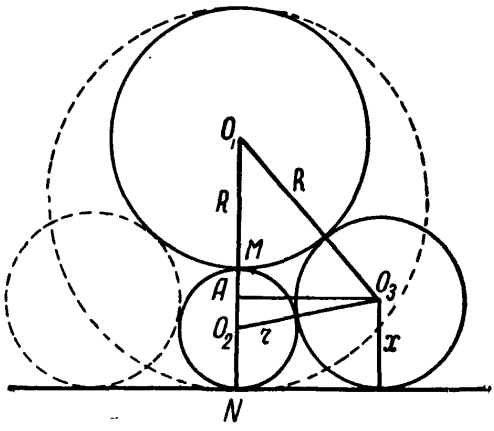


Рис. 149

Решаем это уравнение:

$$(2R + 2r)(2x - 2r) = 4rx, \quad (R + r)(x - r) = rx,$$

$$Rx = r(R + r), \quad x = \frac{r}{R}(R + r).$$

Нетрудно видеть, что две другие окружности имеют радиусы:

$$\frac{2R+2r}{2}=R+r \text{ и } \frac{r}{R}(R+r).$$

923. Как видно из рис. 150,

$$DM=\sqrt{DE^2+ME^2}=\sqrt{(DL+LE)^2+EC^2}=$$
$$=\sqrt{(OL+LE)^2+(LC-EL)^2}=\sqrt{(OL+LE)^2+(OL-LE)^2}=$$
$$=\sqrt{2OL^2+2LE^2}=\sqrt{2}\sqrt{OL^2+LE^2}=\sqrt{2}\sqrt{OE^2}=\sqrt{2}OE=$$
$$=R\sqrt{2}.$$

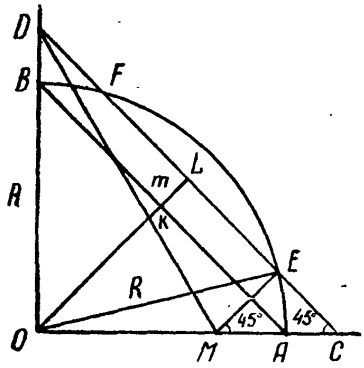


Рис. 150

Так как длина отрезка DM не содержит m, то это и означает, что она не зависит от m.

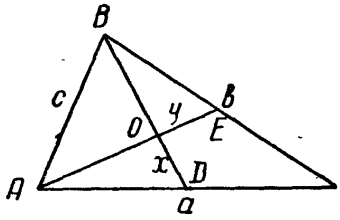


Рис. 151

924. Обозначим искомую сторону буквой c (рис. 151). Так как треугольники AOB, BOE и AOD — прямоугольные, то по теореме Пифагора получим:

$$AO^2+OD^2=AD^2;\ BO^2+OE^2=BE^2;\ BO^2+AO^2=AB^2.$$

Точка O делит каждую медиану в отношении 1 к 2, считая от основания. Поэтому, если положить $OD=x$, $OE=y$, то $AO=2y$, $BO=2x$. Так как, кроме того, $BE=\frac{b}{2}$, $AD=\frac{a}{2}$ и $AB=c$, то написанные выше равенства можно переписать так:

$$4y^2+x^2=\frac{a^2}{4};\quad 4x^2+y^2=\frac{b^2}{4};\quad 4x^2+4y^2=c^2.$$

Складывая почленно первые два уравнения, получаем

$$5x^2+5y^2=\frac{a^2+b^2}{4} \text{ или } 4x^2+4y^2=\frac{a^2+b^2}{5}.$$

Воспользовавшись теперь третьим уравнением, найдем

$$c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}.$$

925. Обозначим искомый радиус буквой x (рис. 152). Так как $\angle AKO = 90°$, то из $\triangle AOK$ находим: $x = AO = \sqrt{AK^2 + KO^2}$; $AK = \frac{a}{2}$, а длину OK найдем из подобных треугольников OKD и KBE (взаимно перпендикулярные стороны). Получим

$$KO : OD = KB : KE.$$

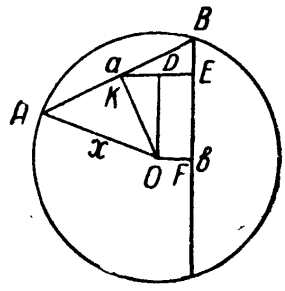


Рис. 152

Но

$$KB = \frac{a}{2};\ KE = d;\ BE = \sqrt{KB^2 - KE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - d^2};\ OD = EF = BF - BE = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - d^2};\ KO = OD\ \frac{KB}{KE} = \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - d^2}\right)\frac{a}{2d}.$$

Таким образом,

$$x = \frac{a}{4d}\sqrt{a^2 + b^2 - 2b\sqrt{a^2 - 4d^2}}.$$

926. Таких окружностей возможно четыре — с центрами в точках A (две концентрические) и D (две концентрические), из которых подробно рассмотрим только одну с центром в A и радиусом $AK = x$ (рис. 153). Проведя ряд построений, понятных из рис. 153, рассмотрим треугольники ACE и FCE. По теореме Пифагора получим

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 = (AF + FE)^2 + EC^2,$$

но

$$AC = AK + KC = x + r;\ AF = 2r;\ EF = \sqrt{FC^2 - EC^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3};\ (x + r)^2 = (2r + r\sqrt{3})^2 + r^2;$$

$$(x + r)^2 = 4r^2 + 4r^2\sqrt{3} + 3r^2 + r^2,\ (x + r)^2 = 8r^2 + 4\sqrt{3}r^2;$$

$$x + r = 2r\sqrt{2 + \sqrt{3}},\ x = -r + 2r\sqrt{2 + \sqrt{3}} = r(2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 1) = r(\sqrt{6} + \sqrt{2} - 1).$$

Здесь была использована формула

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Радиусы других окружностей (две из них обозначены пунктиром) будут:

$$AL = r(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1);\ DN = r(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1);$$
$$DM = r(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1).$$

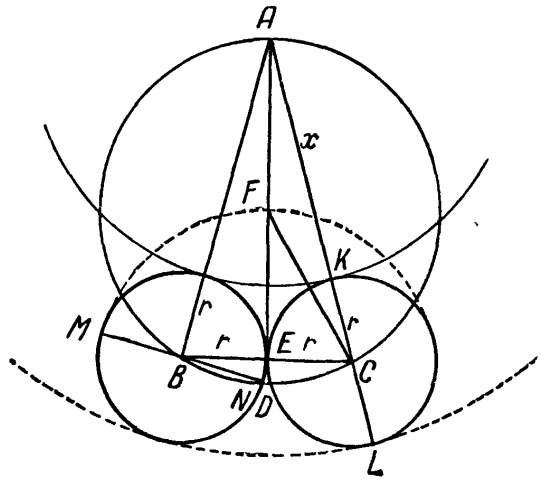


Рис. 153

Окончательно ответ можно записать так:

$$r(\sqrt{6} \pm \sqrt{2} \pm 1).$$

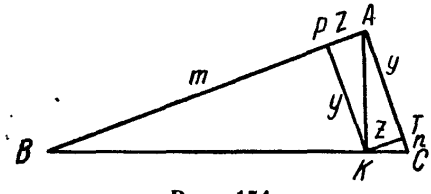


Рис. 154

927. Обозначим $KP = y$, $KT = z$ (рис. 154). Пользуясь свойством перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, получим: $y^2 = mz$, $z^2 = ny$. Отсюда находим:

$$z = \frac{y^2}{m};\ \frac{y^4}{m^2} = ny;\ y^3 = m^2n;\ y = \sqrt[3]{m^2n};\ z = \sqrt[3]{mn^2}.$$

Теперь, пользуясь теоремой Пифагора, вычислим гипотенузу:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (m + z)^2 + (n + y)^2 = (m + \sqrt[3]{mn^2})^2 +$$
$$+ (n + \sqrt[3]{m^2n})^2 = \sqrt[3]{m^2}(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^2 + \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{m^2})^2 =$$
$$= (\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{m^2})^2 \cdot (\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2}) = (\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^3.$$

Обозначая $BC = x$, можем написать окончательно:

$$x^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}},\quad x = (m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

928. $LK^2 = AK \cdot KB$ (рис. 155), где K — проекция C на AB. Но $\triangle AHK \sim \triangle CKB$ (взаимно перпендикулярные стороны), поэтому $AK : HK = CK : KB$ или $AK \cdot KB = CK \cdot HK$. Отсюда:

$$LK^2 = CK \cdot HK;\ LK = \sqrt{CK \cdot HK} \text{ или } S = \frac{1}{2} AB \cdot LK =$$

$$= \frac{1}{2} AB\sqrt{CK \cdot HK} = \sqrt{\frac{1}{2} AB \cdot CK \cdot \frac{1}{2} AB \cdot HK} = \sqrt{S_1 S_2}.$$

929. Этот радиус можно найти по формуле $r = \frac{S}{P}$, если найти третью сторону (рис. 156). Найдем ее. Пусть треугольник с заданными сторонами есть ABC. Опишем вокруг него окружность

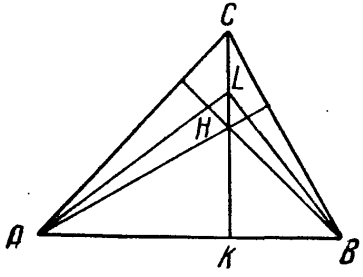


Рис. 155

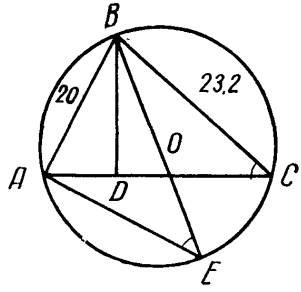


Рис. 156

и проведем высоту его BD и диаметр BE. Соединив конец диаметра E с вершиной треугольника A, получим прямоугольный треугольник ABE, подобный треугольнику CBD, так как $\angle BDC = \angle BAE = 90°$, $\angle BCA = \angle BEA$. Из подобия имеем:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{EB},\ BD = AB \cdot \frac{BC}{BE} = 20 \cdot \frac{23\frac{1}{5}}{29} = \frac{20}{29} \cdot \frac{116}{5} = 16;$$

$$AC = AD + DC = \sqrt{AB^2 - BD^2} + \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{116}{5}\right)^2 - 16^2} = 12 + \frac{84}{5} = \frac{144}{5};$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{144}{5} \cdot 16 = \frac{1152}{5};$$

$$P = \frac{1}{2}\left(20 + \frac{116}{5} + \frac{144}{5}\right) = 36;\ r = \frac{1152}{5 \cdot 36} = 6{,}4.$$

930. Соединим середину гипотенузы E с серединой F катета (рис. 157). Очевидно, $EF \parallel AC$, а следовательно, $EF \perp BC$. Угол DFE, таким образом, является прямым вписанным углом в окруж-

ность. Поэтому перпендикуляр ED к гипотенузе в точке касания ее с окружностью пересечется с продолжением катета BC в точке D, находящейся на окружности, т. е. ED есть диаметр. Замечая, что $\triangle EBD \sim \triangle ABC$, так как они прямоугольные и имеют общий угол ABC, пишем:

$$\frac{ED}{BE} = \frac{AC}{BC};\ BE = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{5}{2};$$

$$ED = 2r = BE \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{3};\ r = \frac{5}{3};\ S = \frac{25}{9}\pi.$$

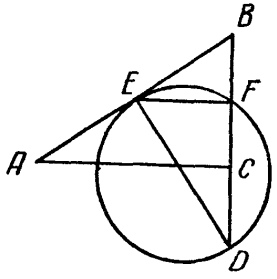


Рис. 157

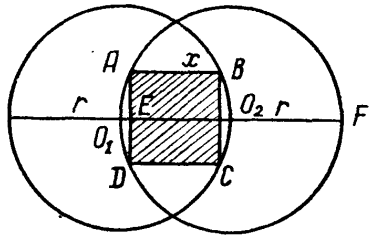


Рис. 158

931. Пусть искомая сторона будет обозначена буквой x, а сам квадрат занимает положение $ABCD$ (рис. 158). Легко доказать, что $AD \perp O_1O_2$, и на основании теоремы о перпендикуляре, опущенном из точки окружности на диаметр, можно написать

$$AE^2 = O_1E \cdot EF.\ \text{Но}\ AE = \frac{x}{2};\ O_1E = \frac{r - x}{2};$$

$$EF = O_1F - O_1E = 2r - \frac{r - x}{2} = \frac{3r + x}{2}\ \text{и поэтому}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{r - x}{2} \cdot \frac{3r + x}{2};\quad 2x^2 + 2rx - 3r^2 = 0,\quad x = \frac{r(\sqrt{7} - 1)}{2}.$$

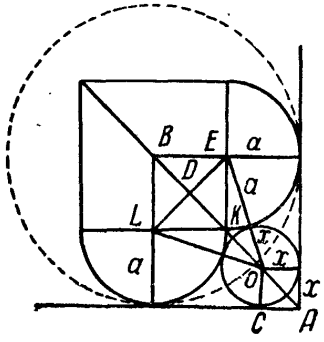


Рис. 159

932. Пусть искомая окружность (рис. 159) имеет центр в точке O (другая возможная окружность обозначена пунктиром). Обозначим искомый радиус буквой x. Сделаем дополнительные построения, понятные из рисунка. Из прямоугольного треугольника EDO получим

$$EO^2 = ED^2 + DO^2 = ED^2 + \\ + (AB - BD - OA)^2.$$

Но

$$EO = a + x,\ ED = \frac{1}{2}EL = \frac{1}{2}\sqrt{EK^2 + KL^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2},\ AB = 2EL = 2a\sqrt{2};$$

$$BD = \frac{1}{2}EL = \frac{a\sqrt{2}}{2},\ OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2},$$

и поэтому будем иметь

$$(a + x)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} - x\sqrt{2}\right)^2.$$

Решаем это уравнение:

$$(a + x)^2 = \frac{a^2}{2} + \left(\frac{3}{2}a\sqrt{2} - x\sqrt{2}\right)^2,\ a^2 + 2ax + x^2 = \frac{a^2}{2} +$$

$$+ \frac{9}{2}a^2 - 6ax + 2x^2,\ x^2 - 8ax + 4a^2 = 0,$$

$$x = 2(2 - \sqrt{3})a.$$

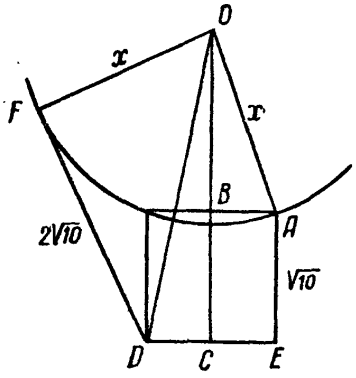


Рис. 160

Радиус окружности, обозначенной пунктиром, равен $2a$.

933. Обозначим искомый радиус буквой x (рис. 160). Рассмотрим прямоугольные треугольники OAB и ODF. Применяя к ним теорему Пифагора, получим

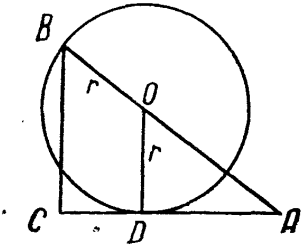


Рис. 161

$$OA^2 = OB^2 + AB^2 = (OC - CB)^2 + AB^2 = AB^2 + (\sqrt{OD^2 - DC^2} -$$

$$- CB)^2 = AB^2 + (\sqrt{OF^2 + FD^2 - DC^2} - CB)^2.$$

Но

$$OA = x;\ OF = x;\ FD = 2\sqrt{10};\ DC = \frac{\sqrt{10}}{2};\ CB = \sqrt{10},$$

и равенство можно переписать так:

$$x^2 = \frac{10}{4} + \left(\sqrt{x^2 + 40 - \frac{10}{4}} - \sqrt{10}\right)^2.$$

Отсюда:

$$x^2 = \frac{10}{4} + x^2 + 40 - \frac{10}{4} - 2\sqrt{10x^2 + 375} + 10,$$

$$2\sqrt{10x^2 + 375} = 50,\ 10x^2 + 375 = 625,\ 10x^2 = 250,\ x = 5.$$

934. Обозначим искомый радиус буквой r (рис. 161). Проведем радиус в точку касания окружности с большим катетом. Так как $OD \parallel BC$, то $\triangle OAD \sim \triangle BAC$, и можно написать $\frac{OD}{OA} = \frac{BC}{BA}$. Но $OD = r$; $BC = 3$; $AB = \sqrt{9 + 16} = 5$; $OA = 5 - r$ и пропорция запишется так: $\frac{r}{5 - r} = \frac{3}{5}$. Отсюда находим: $5r = 15 - 3r$;

$$r = \frac{15}{8}.$$

935. Из прямоугольных треугольников AO_1B, AOB и COO_1 (рис. 162) имеем:

$$AO_1^2 - O_1B^2 = AO^2 - BO^2,\ 9 - O_1B^2 = 25 - (5 - O_1B)^2,$$

$$O_1B = \frac{9}{10},\ CO = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = 4.$$

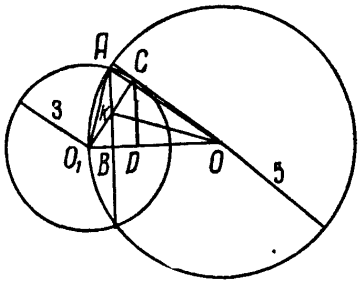


Рис. 162

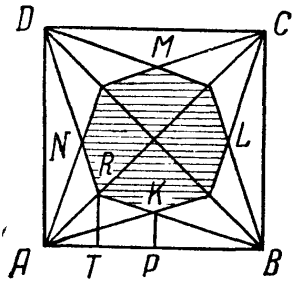


Рис. 163

Из подобия треугольников O_1KB и O_1CO находим:

$$KB : O_1B = CO : O_1C;\ KB = O_1B \cdot \frac{OC}{O_1C} = \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{3} = \frac{6}{5};$$

$$OB = OO_1 - O_1B = 5 - \frac{9}{10} = \frac{41}{10}.$$

Отсюда по теореме Пифагора

$$OK = \sqrt{KB^2 + OB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{73}.$$

936. Искомая площадь S, очевидно, равна сумме площадей треугольников AKB, BLC, CMD и DNA (рис. 163). Но эти треугольники равны, и поэтому можно записать

$$S = 4S_{AKB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot KP = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot KP.$$

Найдем KP. Из подобия треугольников KPB и RTB получаем

$$KP : RT = PB : TB \text{ и } KP = RT \cdot \frac{PB}{TB}.$$

Так как площадь ромба равна половине площади квадрата и одна диагональ у них общая, то вторая диагональ ромба равна половине диагонали квадрата. После этого нетрудно установить, что

$$RT = \frac{1}{4} CB = \frac{1}{4} a; \quad BT = \frac{3}{4} \cdot AB = \frac{3}{4} a.$$

Что касается PB, то ясно, что $PB = \frac{1}{2} a$. Итак, имеем:

$$KP = RT \cdot \frac{PB}{TB} = \frac{1}{4} a \cdot \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{a}{6} \text{ и } S = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{6} = \frac{a^2}{3}.$$

937. Очевидно, радиус этой окружности равен $\frac{1}{2} BM$ (рис. 164). По теореме Пифагора получим:

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 = a^2 + CM^2,$$
$$CM = AC - AM = b - AM.$$

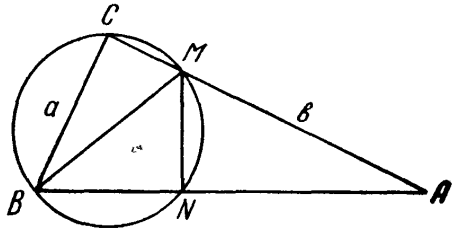


Рис. 164

Величину AM найдем из подобия треугольников ABC и AMN, после чего легко найдутся CM и BM. Действительно:

$$\frac{AB^2}{AM^2} = \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = 2, \; AB^2 = a^2 + b^2, \; \frac{a^2 + b^2}{AM^2} = 2;$$

$$AM^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \; CM = b - AM = b - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}};$$

$$BM^2 = a^2 + CM^2 = a^2 + \left(b - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\right)^2 = a^2 +$$

$$+ b^2 - 2b\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{3}{2}(a^2 + b^2) - b\sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Искомая площадь

$$S = \pi \cdot \frac{BM^2}{4} = \frac{\pi}{8}\left[3(a^2 + b^2) - 2b\sqrt{2(a^2 + b^2)}\right].$$

Отметим, что вокруг четырехугольника $BCMN$ действительно можно описать окружность, потому что $\angle BCM + \angle BNM = 180°$.

938. Общая касательная MN (рис. 165) к данным окружностям будет средней линией трапеции $ABCD$. В самом деле, отрезки касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки, равны. Поэтому $KM = AM = BM$ и $KN = DN = CN$. Следовательно, $MN = AB$, а искомая площадь $S = MN \cdot BF = AB \cdot BF = AB \cdot \frac{AB^2}{BF} = \frac{AB^3}{BF}$.

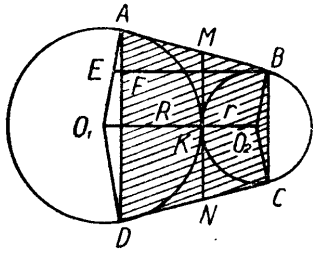


Рис. 165

Но $BE = O_2O_1 = R + r$, $AE = R - r$,

$$AB = \sqrt{BE^2 - AE^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$ и

$$S = \frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

939. Обозначим искомую площадь буквой S. Проведем $DK \perp AB$ (рис. 166), диаметр EL и прямую FL. По свойству описанного четырехугольника $DC + AB = AD + CB$ и площадь

$$S = \frac{AB + DC}{2} \cdot DK = \frac{AD + CB}{2} \cdot DK =$$

$$= AD \cdot DK = AD \cdot 2r,$$

так как трапеция равнобедренная в силу равенства углов DAB и CBA. Величину же DA найдем из подобных треугольников ADK и ELF (в силу перпендикулярности сторон). Составим пропорцию:

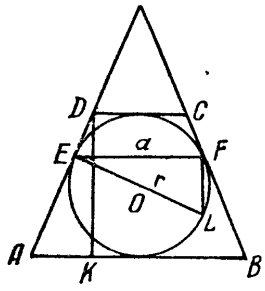


Рис. 166

$$\frac{AD}{EL} = \frac{DK}{EF}, \quad \frac{AD}{2r} = \frac{2r}{a}.$$

Отсюда

$$AD = \frac{4r^2}{a} \text{ и } S = AD \cdot 2r = \frac{8r^3}{a}.$$

940. Пользуясь формулой Герона, найдем площадь треугольника

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Соединим теперь центр O (рис. 167) вписанного полукруга с вершиной C треугольника и вычислим площадь $\triangle ABC$, как сумму площадей треугольников AOC и BOC. Получим:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot OD + \frac{1}{2}BC \cdot OE = \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar =$$

$$= \frac{r}{2}(a+b);\quad r = \frac{2S}{a+b},\quad 2r = \frac{4S}{a+b}.$$

941. Обозначим радиус вписанной в треугольник окружности

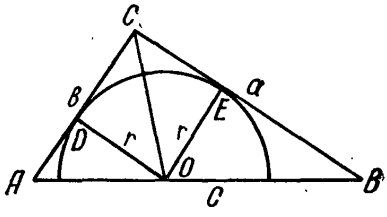


Рис. 167

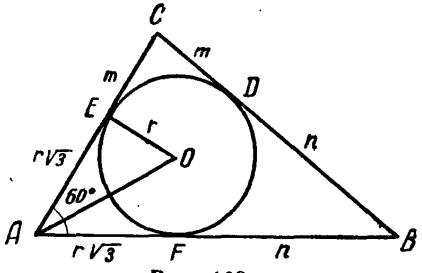


Рис. 168

буквой r. В треугольнике OEA (рис. 168) гипотенуза $AO = 2r$, так как $\angle EAO = 30°$. Поэтому $AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = r\sqrt{3} = AF$. Заметив, что $EC = m$ и $BF = n$, подсчитаем площадь треугольника по формуле $S = pr$, а затем по формуле Герона. В первом случае получаем

$$S = pr = (m + n + r\sqrt{3})r,$$

а во втором

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(m+n+r\sqrt{3})\,mnr\sqrt{3}}.$$

Сравнивая правые части, предварительно возведенные в квадрат, получаем:

$$(m+n+r\sqrt{3})^2 r^2 = (m+n+r\sqrt{3})mnr\sqrt{3},$$

$$(m+n+r\sqrt{3})r = mn\sqrt{3};\quad S = mn\sqrt{3}.$$

942. Пусть $CM = x$ (рис. 169), а высоты треугольников ABE и CME соответственно h_1 и h_2. По условию

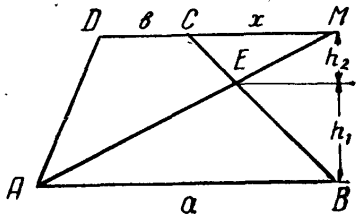


Рис. 169

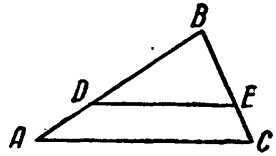


Рис. 170

$$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2) \text{ или } \frac{2a}{a+b} = \frac{h_1+h_2}{h_1} = 1 + \frac{h_2}{h_1}.$$

Но из подобных треугольников ABE и CME имеем $\frac{x}{a} = \frac{h_2}{h_1}$.

Отсюда:

$$\frac{2a}{a+b} = 1 + \frac{x}{a},\quad \frac{x}{a} = \frac{a-b}{a+b},\quad x = a\cdot\frac{a-b}{a+b}.$$

943. $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (рис. 170). Но в подобных треугольниках отношение их площадей равно квадрату отношения сходственных сторон, и поэтому имеем

$$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\frac{1}{2}S}}=\sqrt{2}.$$

Отсюда

$$\frac{AD}{DB}+1=\sqrt{2} \text{ и } \frac{AD}{DB}=\frac{CE}{BE}=\sqrt{2}-1.$$

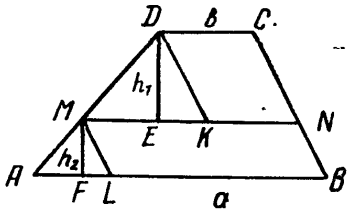


Рис. 171

944. Проведем $DK \parallel BC$ и $ML \parallel BC$ (рис. 171). Если обозначить высоты треугольников DMK и MAL, проведенные соответственно из вершин D и M, через h_1 и h_2, а искомую длину через x, то равенство $S_{MNCD}=S_{ABNM}$ запишется так:

$$\frac{x+b}{2}\cdot h_1=\frac{a+x}{2}\cdot h_2.$$

Но, с другой стороны, $\triangle AML \sim \triangle MDK$ и, следовательно,

$$\frac{MK}{h_1}=\frac{AL}{h_2} \text{ или } \frac{x-b}{h_1}=\frac{a-x}{h_2}.$$

Перемножая левые части полученных равенств, а затем правые и приравнивая результаты, получим:

$$\frac{x+b}{2}\cdot h_1\cdot\frac{x-b}{h_1}=\frac{a+x}{2}\cdot h_2\cdot\frac{a-x}{h_2},\ x^2-b^2=a^2-x^2,$$

$$2x^2=a^2+b^2,\ x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

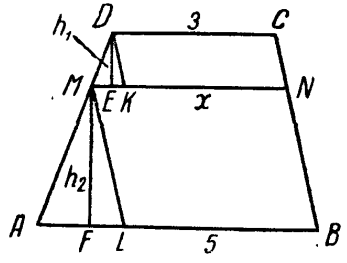


Рис. 172

945. Решается аналогично задаче 944. Проводим $DK \parallel BC$ и $ML \parallel BC$ (рис. 172). Обозначим: $MN=x$, $DE=h_1$, $MF=h_2$. Так как

$$S_{ABNM} : S_{MNCD}=7:2, \text{ то}$$

$$\frac{5+x}{2}h_2 : \frac{x+3}{2}h_1=7:2 \text{ или}$$

$2(5+x)h_2=7(x+3)h_1$. Из подобия треугольников AML и MDK имеем $\frac{5-x}{h_2}=\frac{x-3}{h_1}$. Перемножая левые части последних двух

равенств, а затем правые и приравнивая результаты, получим

$$2(25 - x^2) = 7(x^2 - 9), \quad x = \frac{1}{3}\sqrt{113}.$$

946. Проведем $CE \parallel DB$ (рис. 173) и обозначим высоты треугольников CDO и ABO через h_1 и h_2. Очевидно, искомая площадь S равна площади $\triangle ACE$. Поэтому, пользуясь подобием треугольников CDO и ACE, можем написать

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}.$$

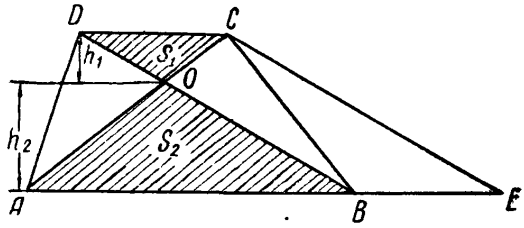


Рис. 173

Точно так же из подобия треугольников ABO и AEC получаем

$$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

Сложив два последних равенства, найдем, что

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{h_1 + h_2}{h_1 + h_2} = 1; \quad \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S};$$

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

947. Обозначим искомую площадь через S, длины отрезков AD, BE и DE (рис. 174) через x, y и z. Так как каждый из полученных треугольников в силу параллельности сторон подобен основному, то можно написать следующие три равенства:

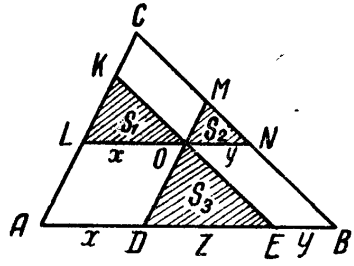


Рис. 174

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{x}{x+y+z}; \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{y}{x+y+z}; \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{z}{x+y+z}.$$

Складывая почленно эти три равенства, получим

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1.$$

Отсюда

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$$

или иначе

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

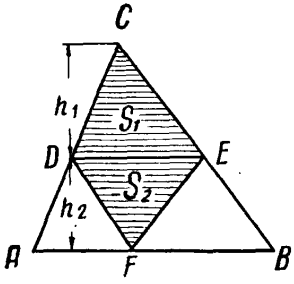


Рис. 175

948. Обозначим искомую площадь буквой Q, а высоты треугольников DCE и ADF, проведенные соответственно из вершин C и D, через h_1 и h_2 (рис. 175). Очевидно, $Q = S_1 + S_{DEF}$, причем в силу параллельности DE и AB S_{DEF} не зависит от выбора точки F на основании AB. Так как у треугольников DCE и FDE DE есть общее основание, то

$$\frac{S_{DEF}}{S_1} = \frac{h_2}{h_1} \text{ или } \frac{S_{DEF}}{S_1} + 1 = \frac{h_2}{h_1} + 1,$$

$$\frac{S_{DEF} + S_1}{S_1} = \frac{h_2 + h_1}{h_1} \text{ или } \frac{Q}{S_1} = \frac{h_2 + h_1}{h_1}.$$

Так как $\triangle DCE \sim \triangle ACB$, то $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}$. Перемножим левые части полученных равенств между собой, а правые между собой:

$$\frac{Q}{S_1} \cdot \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{h_2 + h_1}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2 + h_1} = 1, \quad \frac{Q}{\sqrt{S \cdot S_1}} = 1, \quad Q = \sqrt{SS_1}.$$

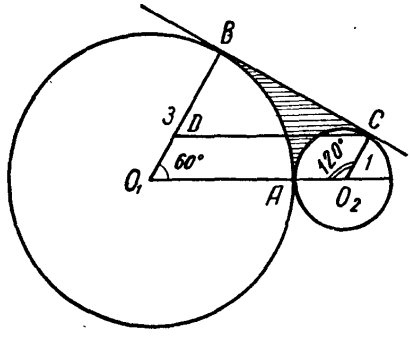


Рис. 176

949. Пусть точки B и C будут точки касания окружностей с общей внешней касательной, а O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 176). Проведем $CD \parallel O_1O_2$. В прямоугольном треугольнике BCD катет $BD = BO_1 - O_1D = BO_1 - CO_2 = 3 - 1 = 2$, а гипотенуза $CD = O_1O_2 = 3 + 1 = 4$. Но если катет в два раза меньше гипотенузы, то противолежащий ему $\angle BCD = 30°$, а $\angle BDC = \angle BO_1A = 60°$ и $\angle CO_2O_1 = 120°$. Искомая площадь S равна разности между площадью трапеции O_1O_2CB и суммой площадей секторов AO_1B и AO_2C. Основания трапеции суть 3 и 1, а высота

$$BC = \sqrt{CD^2 - BD^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}.$$

Поэтому

$$S = \frac{3+1}{2} 2\sqrt{3} - \left(\frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 60}{360} + \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 120}{360} \right) =$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi = \frac{24\sqrt{3} - 11\pi}{6}.$$

950. Подставив в формулу Герона

$$a = \frac{2S}{h_1},\ b = \frac{2S}{h_2},\ c = \frac{2S}{h_3},$$

получим

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)}}.$$

951. Продолжим одну из медиан за основание треугольника на отрезок, равный $\frac{1}{3}$ медианы. Соединим конец этого отрезка и точку пересечения медиан с концом основания. При этом получится треугольник со сторонами $\frac{2}{3}m_1$, $\frac{2}{3}m_2$, $\frac{2}{3}m_3$ и с площадью, в три раза меньше искомой. Тогда, воспользовавшись формулой Герона, получим

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_1+m_2+m_3)(m_1+m_2-m_3)(m_2+m_3-m_1)(m_3+m_1-m_2)}.$$

952. Вычислительно это находится быстро, а именно, если длины диагоналей суть l_1 и l_2, а угол между ними α, то площадь четырехугольника

$$S = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin\alpha,$$

а площадь параллелограмма

$$Q = l_1 l_2 \sin\alpha.$$

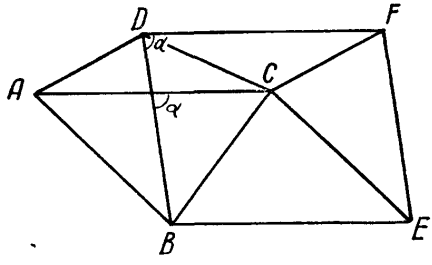


Рис. 177

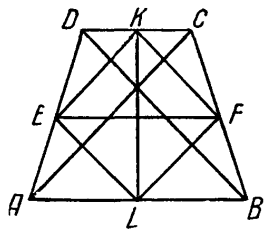


Рис. 178

Отсюда получаем $Q = 2S$. Этот же результат можно получить чисто геометрически. Приведем это второе решение. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 177). Так как $ACFD$, $ABEC$ и $BEFD$ — параллелограммы, то $\triangle ABD = \triangle CEF$, $\triangle BCE = \triangle ACB$, $\triangle ADC = \triangle DCF$. Поэтому

$$Q = S_{CDF} + S_{BCE} + S_{CEF} + S_{BCD} = (S_{ACD} + S_{ABC}) +$$
$$+ (S_{ABD} + S_{BCD}) = S + S + 2S.$$

953. Пусть EF — средняя линия трапеции (рис. 178.) Проведем высоту KL трапеции через точку пересечения диагоналей. Ввиду равнобедренности трапеции точки K и L будут серединами оснований. Соединим точки E, K, F и L последовательно. Получим квадрат $EKFL$. Действительно, EK есть средняя линия в треугольнике ADC и $EK = \frac{1}{2} AC$. Аналогично $FL = \frac{1}{2} AC$, $KF = \frac{1}{2} DB$, $EL = \frac{1}{2} DB$. Но в равнобедренной трапеции диагонали равны, а если $AC = BD$, то $EK = KF = FL = LE$, т. е. четырехугольник $EKFL$ есть ромб, а так как диагонали взаимно перпендикулярны, то $\angle EKF = 90°$ ($EK \parallel AC$, $FK \parallel BD$) и $EKFL$ есть квадрат. Отсюда видим, что высота трапеции $KL = EF = d$.

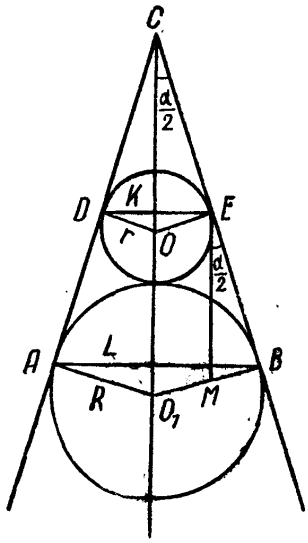


Рис. 179

Итак, $S = EF \cdot KL = d^2$.

954. Обозначим искомый $\angle ACB = \alpha$, а радиусы окружностей через r и R (рис. 179.) Проведем биссектрису CO_1 угла и $EM \parallel CO_1$. Очевидно, $\angle BEM = \angle ECK = \frac{\alpha}{2}$. Так как по условию $DE = 2a$ и $AB = 2b$, то, полагая $R > r$, получим $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{MB}{ME} = \frac{R - r}{R + r}$.

Но $\triangle AO_1B \sim \triangle DOE$, как треугольники с соответственно параллельными сторонами. Поэтому

$$\frac{O_1B}{OE} = \frac{AB}{DE}, \quad \frac{R}{r} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} \text{ и } \frac{R - r}{R + r} = \frac{b - a}{b + a}.$$

Отсюда

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b - a}{b + a}.$$

955. Обозначив искомый $\angle CBA = \alpha$ (рис. 180), поступаем далее так же, как и в задаче 954. Получим

$$\cos\alpha = \frac{R-r}{R+r}.$$

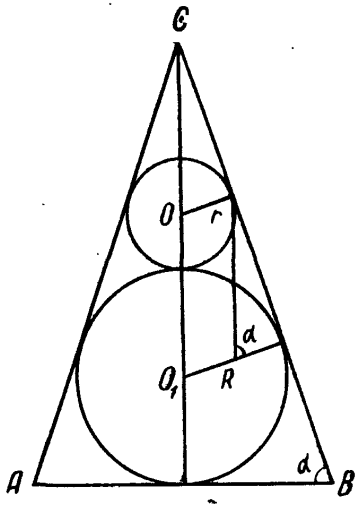


Рис. 180

956. Нужно найти площадь четырехугольника $NKLM$ (рис. 181). Обозначим ее буквой S, а диагонали $NL = 2x$ и $KM = 2y$. Выполнив дополнительные построения, понятные

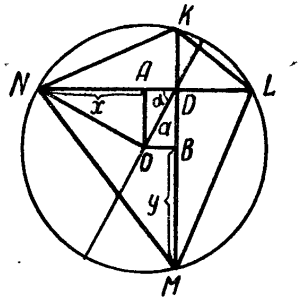


Рис. 181

из рисунка, получаем из рассмотрения прямоугольных треугольников ODA и OAN:

$$2x = NL = 2NA = 2\sqrt{NO^2 - OA^2} =$$

$$= 2\sqrt{NO^2 - (OD\sin\alpha)^2} = 2\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha}.$$

Аналогично другая диагональ

$$2y = KM = 2\sqrt{R^2 - a^2\cos^2\alpha}.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2y = 2\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha}\,\sqrt{R^2 - a^2\cos^2\alpha} =$$

$$= 2\sqrt{R^4 - a^2R^2 + \frac{a^4}{4}\sin^2 2\alpha}.$$

957. Введем обозначения: $\angle CAB = \alpha$, $\angle BAF = \beta$ (рис. 182). Тогда $\angle ACB = 90^\circ - (\alpha + \beta)$, а $\angle ABC = 180^\circ - (90^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta$. Искомый радиус x по теореме синусов определится так: $x = \frac{BC}{2\sin\alpha}$. По той же теореме можем записать

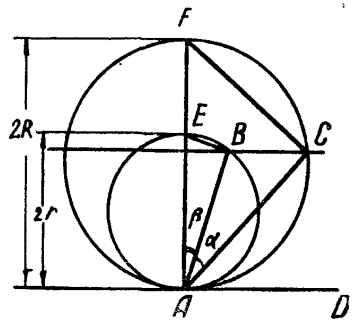


Рис. 182

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(90^\circ+\beta)} = \frac{AB}{\sin[90^\circ-(\alpha+\beta)]}$$

или

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\cos\beta} = \frac{AB}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Из треугольников ACF и ABE получаем

$$AC = 2R\cos(\alpha+\beta) \text{ и } AB = 2r\cos\beta.$$

Подставляя это в два последних отношения, получим:

$$\frac{2R\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = \frac{2r\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}; \quad \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta} = \frac{r}{R};$$

и

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = \sqrt{\frac{r}{R}}$$

(α и $\alpha+\beta$ — острые углы). Отсюда

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{2R\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = 2R\sqrt{\frac{r}{R}} = 2\sqrt{Rr}.$$

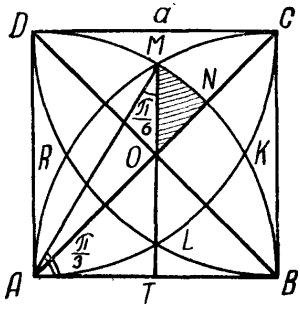


Рис. 183

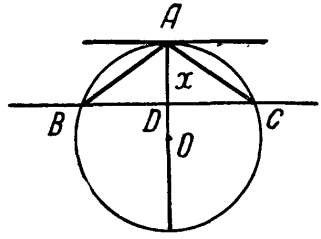


Рис. 184

Следовательно,

$$x = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \sqrt{Rr}.$$

958. Очевидно, искомая площадь

$$S = 8S_{OMN} = 8(S_{AMN} - S_{AMO}) \text{ (рис. 183).}$$

Так как в треугольнике AMT катет $AT = \frac{a}{2}$, а гипотенуза $AM = a$, то

$$\angle AMT = \frac{\pi}{6}, \quad \angle MAT = \frac{\pi}{3}, \quad \angle MAO = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Поэтому

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}a^2\frac{\pi}{12} = \frac{\pi a^2}{24}, \quad S_{AMO} = \frac{1}{2}AM \cdot OM \sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{4}a \cdot OM = \frac{1}{4}a(MT - OT) = \frac{a}{4}\left(AM\sin\frac{\pi}{3} - \frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{8}a^2.$$

Отсюда

$$S = 8\left(\frac{\pi a^2}{24} - \frac{\sqrt{3}-1}{8}a^2\right) = \frac{a^2}{3}(\pi + 3 - 3\sqrt{3}).$$

959. Обозначим расстояние AD между параллельными прямыми через x, а площадь $\triangle ABC$ через y (рис. 184). Пользуясь теоремой о произведении отрезков пересекающихся хорд, получим:

$$BD \cdot DC = BD^2 = x(2R - x), \quad BD = \sqrt{x(2R-x)}.$$

Следовательно,

$$y = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 2BD \cdot AD = BD \cdot AD = x\sqrt{x(2R-x)}.$$

960. Если стороны прямоугольника x и y, то его площадь $S = xy$, а периметр $P = 2x + 2y$. Используя равенство $xy = S$, преобразуем выражение для периметра. Получим:

$$P = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{S}{x} = 2 \cdot \frac{x^2 + S}{x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2 - 2x\sqrt{S} + S + 2x\sqrt{S}}{x} = 2 \cdot \frac{(x - \sqrt{S})^2}{x} + 4\sqrt{S}.$$

Отсюда видно, что наименьшее значение для P получится при $x = \sqrt{S}$, и оно равно $4\sqrt{S}$. Но тогда и $y = \sqrt{S}$.

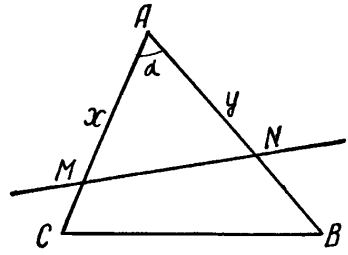


Рис. 185

961. Положим $AM = x$, $AN = y$ (рис. 185). Тогда по теореме косинусов

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha,$$

а так как

$$\frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}S; \quad y = \frac{S}{x\sin\alpha}, \text{ то } MN^2 = x^2 + \frac{S^2}{x^2\sin^2\alpha} -$$

$$- 2S\operatorname{ctg}\alpha = \left(x - \frac{S}{x\sin\alpha}\right)^2 + \frac{2S}{\sin\alpha} - 2S\operatorname{ctg}\alpha.$$

Величина MN^2, а вместе с ней и MN получат наименьшее значение тогда, когда

$$x - \frac{S}{x\sin\alpha} = 0,\ x^2 = \frac{S}{\sin\alpha},\ x = \sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}.$$

В этом случае

$$y = \frac{S}{x\sin\alpha} = \sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}};\ MN = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha} - 2S\operatorname{ctg}\alpha} = 2\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2},$$

а искомый периметр

$$2p = 2x + MN = 2\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}.$$

962. На основании теорем, обратных следующим: 1) сумма любых двух сторон треугольника больше третьей; 2) Пифагора.

XIV.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ

(Стереометрия)

963. Возьмем внутри правильного тетраэдра $ABCD$ точку O (рис. 186). Соединив отрезками прямых точку O со всеми вершинами тетраэдра, получим четыре пирамиды; $ABCO$, $BCDO$, $CADO$, $ABDO$. Очевидно, сумма объемов этих четырех пирамид равна объему данного тетраэдра. Обозначив площадь грани тетраэдра и его высоту через S и h, а расстояние от точки O до граней, которые являются высотами полученных пирамид, через h_1, h_2, h_3, h_4, получим:

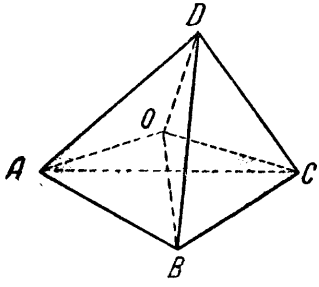


Рис. 186

$$\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}Sh_1 + \frac{1}{3}Sh_2 + \frac{1}{3}Sh_3 + \frac{1}{3}Sh_4$$

или

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h.$$

964. Если все прямые пересекаются в одной точке, то имеет место первый случай. Если же какая-нибудь данная прямая не проходит через точку пересечения двух других данных прямых, то тогда она лежит в плоскости, проведенной через эти две прямые, потому что она имеет две общие точки с этой плоскостью,

являющиеся точками пересечения ее с прямыми, определяющими плоскость. Аналогично можно показать, что всякая другая данная прямая (их конечное множество) также лежит в этой плоскости.

965. а) Пусть противоположные грани четырехгранного угла обозначены P, Q и R, S (рис. 187). Пусть линия пересечения первых двух есть OA, а вторых OB. Всякая плоскость, пересекающая грани угла и параллельная плоскости, проведенной через прямые OA и OB, пересекает угол по параллелограмму. Действительно, линии пересечения проведенной плоскости с плоскостями P и Q параллельны AO, а с плоскостями R и S параллельны OB.

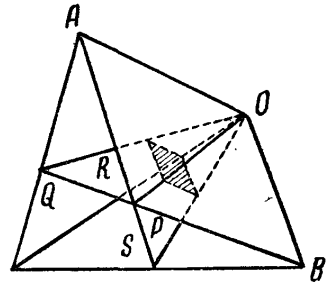


Рис. 187

б) Если плоскость $P \parallel$ плоскости Q (или плоскость $R \parallel$ плоскости S), то любая плоскость, секущая грани угла и параллельная прямой OB (соответственно прямой OA), пересечет угол по параллелограмму,

в) Если плоскость $P \parallel$ плоскости Q и плоскость $R \parallel$ плоскости S, то любая плоскость, секущая грани угла, даст в сечении параллелограмм.

966. Через вершины K, L, P (рис. 188) данного куба проведем плоскость, а через середину A ребра KM — другую плоскость, параллельную первой. Сечение куба второй плоскостью будет плоский шестиугольник $ABCDEF$. Этот шестиугольник правильный, так как все стороны его равны между собой и равны половине диагонали грани куба, а углы равны по 120°, потому что они имеют стороны, параллельные сторонам правильного треугольника KLP.

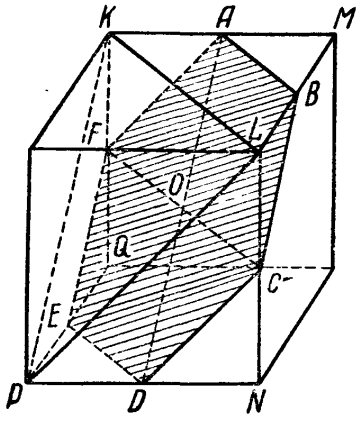


Рис. 188

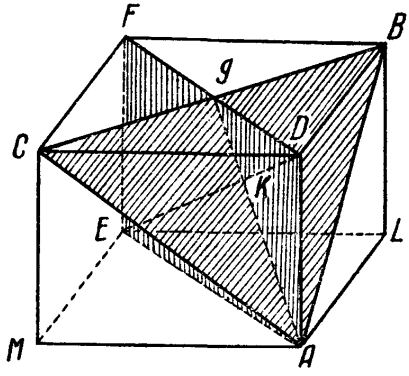


Рис. 189

967. Плоскость, проходящая через ребро AD (рис. 189) и параллельное ему ребро EF, пересечет сторону $\triangle ABC$ в середине g

стороны BC. Следовательно, диагональ ED параллелепипеда пересечет плоскость $\triangle ABC$ в точке K, лежащей на медиане Ag. Проведя плоскость через ребра BD и ME, аналогично докажем, что эта диагональ проходит и через вторую медиану $\triangle ABC$, т. е. через точку пересечения медиан.

968. Пусть дан трехгранный угол $OABC$ (рис. 190). Так как его двугранные углы с ребрами OA и OB острые, то проекция OD ребра OC на плоскость OAB расположится между прямыми OA и OB. Но любой плоский угол трехгранного угла меньше 180°. Действительно, если бы он был больше 180° или равен 180°, то, учитывая, что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего, получили бы для суммы всех плоских углов величину, большую 360°, что, как известно, невозможно. Поэтому по меньшей мере один из углов AOD или DOB будет острый. Предположим, что именно $\angle AOD$ меньше 90°. Тогда проведем плоскость $P \perp OA$ (рис. 191). Так как $\angle AOD$ меньше 90°, а $\angle AOK = 90°$, то $\angle AOD$ расположится внутри $\angle AOK$, а следовательно, трехгранный угол $OADC$ будет находиться внутри прямого двугранного угла $AOKM$. Продолжим грань OAC до пересечения ее с плоскостью P. Получим в пересечении этих плоскостей прямую $ON \perp OA$. Итак, $\angle AON = 90°$, а $\angle AOD$ — часть угла AON. Следовательно, плоский угол AOD данного трехгранного угла меньше 90°, т. е. он острый.

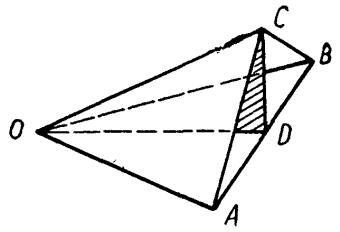


Рис. 190

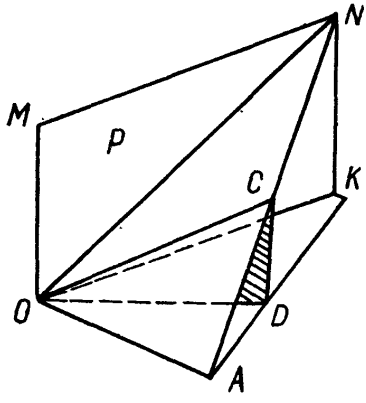


Рис. 191

Аналогично доказывается, что и плоские углы AOB и BOC тоже острые.

969. Пусть одно из сечений этой поверхности плоскостью есть окружность с центром в O_1 (рис. 192). Проведем через O_1 плоскость, перпендикулярную плоскости полученной окружности. Эта плоскость пересечет окружность по диаметру AB, а поверхность — по новой окружности, проходящей через точки A и B. Взяв центр и радиус этой второй окружности за центр и радиус сферы, опишем сферу. Любая точка M построенной сферы лежит на рассматриваемой поверхности. Действительно, проведем через эту точку и через центры двух построенных окружностей плоскость, которая пересечет каждую из окружностей в двух точках, а сферу — по новой окружности. Эта последняя, как имеющая с поверх-

ностью три (даже четыре!) общие точки, лежит на поверхности, а значит, лежит на ней взятая точка сферы. С другой стороны, любая точка, не находящаяся на построенной сфере, не принадлежит рассматриваемой поверхности. Действительно, если бы она принадлежала поверхности, то тогда эта точка и две точки пересечения сферы с прямой, соединяющей центр сферы с рассматриваемой точкой, лежали бы на одной окружности, что невозможно. Теорема доказана.

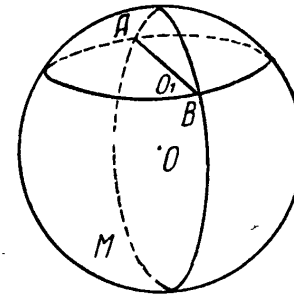


Рис. 192

970. Допустим, что такой многогранник существует и имеет m граней. Пусть грани имеют число сторон $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Подсчитаем число ребер этого многогранника. Очевидно, число всех сторон всех граней в два раза больше числа ребер многогранника, так как одно и то же ребро служит общей стороной двум смежным граням. Поэтому число ребер многогранника $l = \dfrac{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}{2}$. Но каждое из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — нечетное и число их m тоже нечетное, поэтому и сумма, стоящая в числителе, тоже нечетная и не разделится без остатка на 2. Итак, такого многогранника не существует.

971. Пусть в четырехгранном угле $SABCD$ наибольший плоский угол есть ASB (рис. 193). Проведем плоскость через прямые SD и SB. Так как любой плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других, то можем записать: $\angle ASB < \angle ASD + \angle DSB$, $\angle DSB < \angle DSC + \angle BSC$. Отсюда получаем $\angle ASB < \angle ASD + \angle DSC + \angle BSC$.

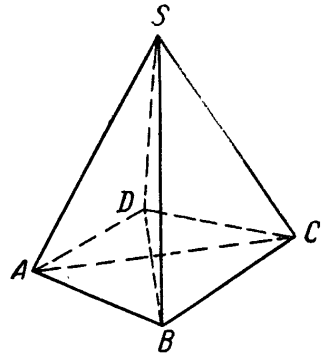


Рис. 193

Доказательство было проведено на примере выпуклого угла. Однако и теорема, и метод доказательства справедливы для любого четырехгранного угла.

972. Рассмотрим какую-нибудь плоскость P, проходящую через данную точку B и не проходящую через другую данную точку A (рис. 194). Пусть $AM \perp$ $\perp$ плоскости P. Соединим B с A и M прямыми. Получим прямоугольный $\triangle AMB$. Отсюда ясно, что точка M лежит на сфере диаметра $2R = AB$ с центром в середине O отрезка AB. Нетрудно доказать, что и обратно — любая точка этой сферы является проекцией точки A на некоторую плоскость, проходящую через точку B, так что эта сфера является искомым геометрическим местом.

973. Проведем через данную прямую AB (рис. 195) плоскость P, пересекающую данную шаровую поверхность с центром в O по окружности с центром в O_1. Соединим прямой точки O и O_1 ($OO_1 \perp$ плоскости P) и через O проведем плоскость $Q \perp AB$, которая пересечет AB в точке C. Треугольник OO_1C прямоугольный и лежит в плоскости Q. Если плоскость P будет вращаться вокруг AB, продолжая сечь шаровую поверхность, то $\triangle OO_1C$ будет продолжать оставаться прямоугольным и лежать в плоскости Q. Поэтому, если AB не имеет общих точек со сферой, то геометрическое место точек O_1 будет часть дуги окружности диаметра OC, заключенная внутри данной сферы. Если AB касается сферы, то это будет окружность радиуса, в два раза меньшего радиуса сферы. Если AB пересекает сферу, то геометрическое место точек O_1 будет окружность диаметра OC. Во всех случаях центр находится в середине отрезка OC.

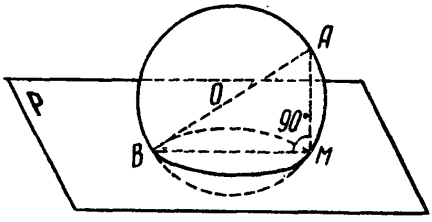


Рис. 194

974. Пусть требуется провести плоскость через прямую EF параллельно прямой AB (рис 196). Возможны два случая: а) $EF \parallel AB$. Тогда любая плоскость, проходящая через EF, но не проходящая через AB, будет параллельна AB, потому что если плоскость проходит через прямую, параллельную данной прямой, то она параллельна этой прямой. б) EF скрещивается с AB. Возьмем на прямой EF любую точку O и проведем через нее прямую $CD \parallel AB$, что по аксиоме параллельности можно сделать, причем такая прямая будет единственная. Через пересекающиеся прямые EF и CD можно провести плоскость и притом только одну. Эта плоскость будет параллельна AB, потому что она проходит через прямую CD, параллельную AB. Покажем, что такая плоскость единственная. Предположим противное, т. е. что существует еще плоскость, проходящая через EF и параллельная прямой AB. Тогда проведем третью плоскость,

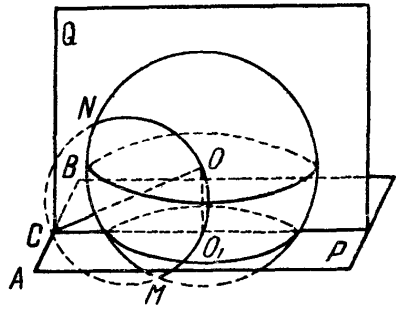


Рис. 195

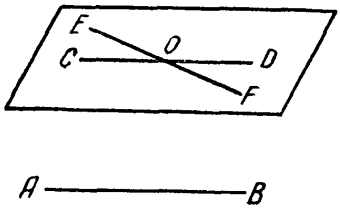


Рис. 196

проходящую через AB и точку O, что можно сделать, и притом такая плоскость будет единственная. Последняя плоскость будет пересекать первые две по двум различным прямым, проходящим через точку O, параллельным AB. Но это невозможно. Следовательно, в этом случае плоскость, проходящая через EF параллельно AB, единственна.

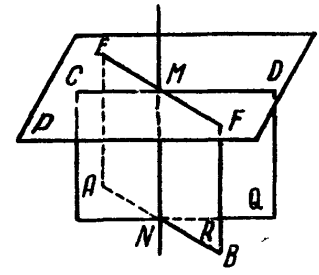


Рис. 197

975. Пусть AB и CD (рис. 197) скрещивающиеся прямые. Проведем через прямую CD плоскость P, параллельную прямой AB (задача 974), и плоскость Q, перпендикулярную к P. Проведем еще через прямую AB плоскость R, перпендикулярную плоскости P и пересекающую P по некоторой прямой EF. Плоскость P, как перпендикулярная к плоскостям Q и R, будет перпендикулярна к линии их пересечения MN. Следовательно, MN перпендикулярна к CD и EF. Но $EF \parallel AB$ и MN лежит в плоскости прямых EF и AB, поэтому $MN \perp AB$. Итак, MN есть общий перпендикуляр прямых AB и CD.

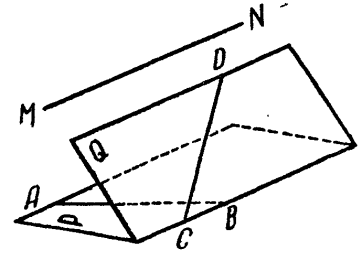


Рис. 198

976. Пусть прямые AB и CD (рис. 198) скрещивающиеся и ни одна из них не параллельна третьей данной прямой MN. Проведем через AB плоскость P, параллельную MN (задача 974). Такая плоскость будет единственная. Проведем через CD плоскость Q, параллельную MN. Такая плоскость тоже будет единственная. Линия CB пересечения плоскостей P и Q и будет искомой. Однако может случиться, что плоскости P и Q параллельны. Это будет иметь место тогда, когда прямые AB, CD и MN параллельны одной и той же плоскости. В этом случае задача не имеет решения. Не будет решения и тогда, когда прямая AB, или прямая CD, или обе они параллельны MN. Если AB и CD лежат в одной плоскости, но не параллельны MN одновременно, то, когда плоскость P, в которой лежат прямые AB и CD, параллельна MN, — существует бесконечное множество решений; когда эта плоскость P не параллельна прямой MN,— существует одно решение (если прямые AB и CD пересекаются) и ни одного (если прямые AB и CD параллельны или все три прямые пересекаются в одной точке).

977. Пусть данные плоскость, прямые и длина отрезка будут P, AB, CD и d (рис. 199). Через прямую AB проведем плоскость Q, параллельную CD, а через CD — плоскость R, параллельную AB (см. задачу 974). Очевидно, плоскости Q и R параллельны и данная плоскость P пересечет их по некоторым прямым KL и MN,

параллельным между собой. Строим отрезок $EF = d$ так, что точки E и F лежат соответственно на KL и MN. Если теперь провести прямую AC так, чтобы она была параллельна прямой EF

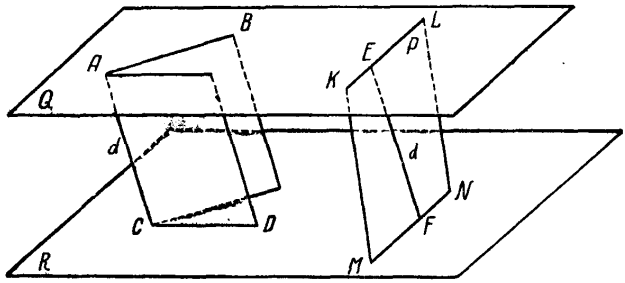


Рис. 199

и пересекала прямые AB и CD (см. задачу 976), то отрезок ее, заключенный между точками пересечения A и C, и будет искомым. Однако возможно такое расположение плоскости P, прямых AB, CD и отрезка d, а также задание длины отрезка, что задача не будет иметь решения, или будет иметь два решения, или бесконечное множество решений.

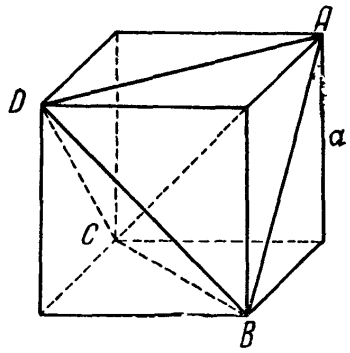


Рис. 200

978. Образовавшаяся фигура есть правильный тетраэдр $ABCD$ (рис. 200) с ребрами $AB = a\sqrt{2}$. Его объем $V = a^3 - 4 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$.

979. Фигура — правильный восьмигранник (октаэдр) с ребром $AB = \frac{1}{2} MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (рис. 201). Он состоит из двух равных правильных пирамид $EABCD$ и $FABCD$ с высотой $EO = \frac{1}{2} EF = \frac{a}{2}$. Поэтому объем $V = 2V_{ABCDE} = 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$.

980. Обозначим ребро основания буквой x, а боковое ребро буквой y (рис. 202). Тогда $S = \frac{1}{2} x^2 + xy + \frac{1}{2} DB \cdot EF$. Полная поверхность призмы $S_п = 2x^2 + 4xy$. Умножая предыдущее равенство

на 4 и сравнивая с последним, видим, что $S_n = 4S - 2DB \cdot EF$. Но $DB = BC\sqrt{2} = x\sqrt{2}$; $EF = FB \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Выразим y через x:

$$y = EC = \sqrt{EF^2 - FC^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{x^2}{2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{\cos \alpha}}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

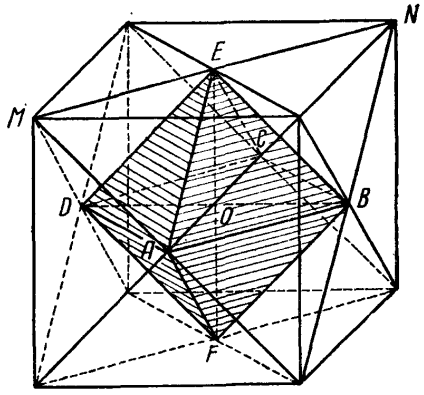


Рис. 201

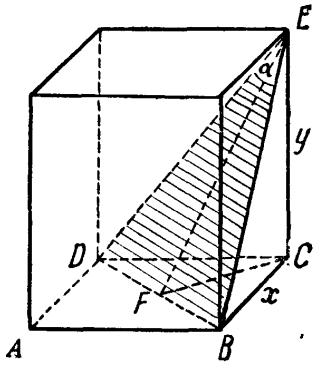


Рис. 202

Теперь можно найти x:

$$S = \frac{1}{2} x^2 + xy + \frac{1}{2} DB \cdot EF = \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^2 \sqrt{\cos \alpha}}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2} x\sqrt{2} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{x^2}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2 \cos \alpha} + \cos \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$x = \sqrt{\frac{2S \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2 \cos \alpha} + \cos \frac{\alpha}{2}}}.$$

Искомая полная поверхность

$$S_n = 4S - 2x\sqrt{2}\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 4S - 2x^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4S - \frac{4S\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}} = 4S\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

981. Из прямоугольных треугольников ADO, DOB и DAB (рис. 203) находим:

$$AO^2 = AD^2 - DO^2 = c^2 - \left(\frac{DB}{\cos 22°30'}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{c\cdot\cos 45°}{\cos 22°30'}\right)^2 =$$

$$= c^2\cdot\frac{\cos^2 22°30' - \cos^2 45°}{\cos^2 22°30'} = c^2\cdot\frac{\frac{1+\cos 45°}{2}-\frac{1}{2}}{\cos^2 22°30'} =$$

$$= \frac{c^2}{2\sqrt{2\cos^2 22°30'}};\quad AO = \frac{c}{\sqrt{2\sqrt{2}\cos 22°30'}}.$$

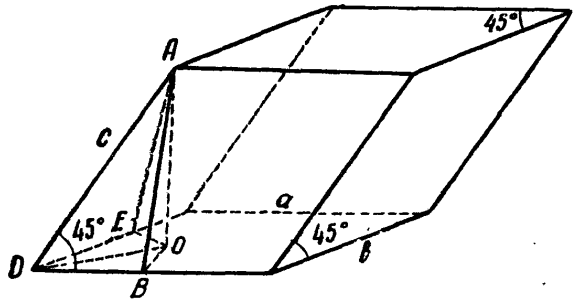


Рис. 203

Поэтому искомый объем

$$V = Sh = S\cdot AO = ab\sin 45°\cdot\frac{c}{\sqrt{2\sqrt{2}\cos 22°30'}} =$$

$$= \frac{abc}{2\sqrt[4]{2}\cos 22°30'}.$$

982. Искомый объем $V = ab\cdot DO$ (рис. 204). Опустим из D перпендикуляры DA и DC на смежные ребра основания. Так как $\triangle DAB = \triangle DCB$, как имеющие общую гипотенузу и по равному острому углу, то $AB = BC$ и прямоугольник $AOCB$ является квадратом. Теперь легко найти высоту параллелепипеда:

$$DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{DB^2 - (AB^2 + AO^2)} = \sqrt{DB^2 - 2AB^2} =$$
$$= \sqrt{c^2 - 2c^2\cos^2\alpha} = c\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Отсюда

$$V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

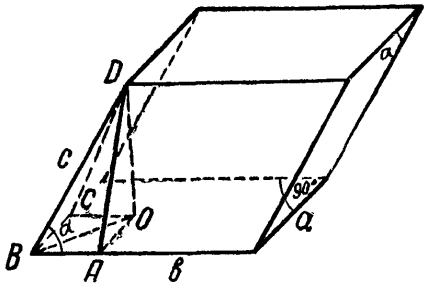


Рис. 204

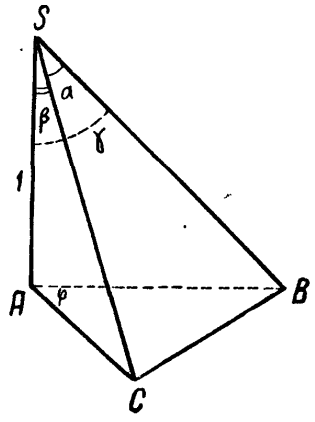


Рис. 205

Замечание. $\cos 2\alpha < 0$, так как $2\alpha > 90°$ (плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других)

983. Через точку A (рис. 205), отстоящую на единицу длины от вершины S данного трехгранного угла $SABC$, проведем плоскость, перпендикулярную ребру SA. Так как углы β и γ острые, то плоскость пересечет и другие ребра трехгранного угла. В сечении получится $\triangle ABC$, его угол BAC и есть, очевидно, искомый. Положим $\angle BAC = \varphi$. Для нахождения φ выразим BC^2 с помощью теоремы косинусов через стороны треугольников ABC и SBC и полученные выражения приравняем. Будем иметь $AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB\cos\varphi = SC^2 + SB^2 - 2SC \cdot SB\cos\alpha$ или $2AC \cdot AB\cos\varphi = 2SC \cdot SB\cos\alpha - (SC^2 - AC^2) - (SB^2 - AB^2)$. Но из треугольников ASC и ASB найдем: $AC = \operatorname{tg}\beta$; $AB = \operatorname{tg}\gamma$; $SC = \dfrac{1}{\cos\beta}$; $SB = \dfrac{1}{\cos\gamma}$; $SC^2 - AC^2 = SB^2 - AB^2 = 1$. Поэтому получим:

$$2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\cos\varphi = \frac{2\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma} - 2;\quad \cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Учитывая равноправность углов α, β, γ, получим для двух других двугранных углов следующие выражения:

$$\frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha} \text{ и } \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

984. Пользуясь рис. 206, можем написать, что искомый объем $V = lm \sin\gamma \cdot BD = lm \sin\gamma \cdot BC \sin\varphi = lm \sin\gamma \cdot AB \sin\beta \sin\varphi = lmn \sin\beta \sin\gamma \sin\varphi$. В последнем выражении неизвестна только величина $\sin\varphi$. Но

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

(см. задачу 983), $1 + \cos\varphi = \frac{\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} =$

$$= \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}[\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma)] = \frac{2}{\sin\beta\sin\gamma} \cdot \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \times$$

$$\times \sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$$

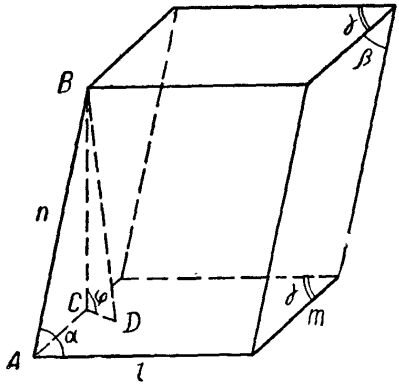


Рис. 206

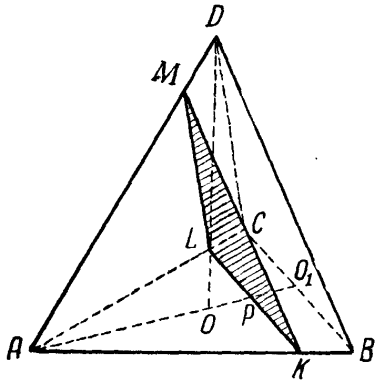


Рис. 207

и аналогично

$1 - \cos\varphi = \frac{2}{\sin\beta\sin\gamma}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$. Теперь легко найдем $\sin\varphi$ на основании формулы $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\cos\varphi} \times \sqrt{1+\cos\varphi}$, после чего получим

$$V = 2lmn\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}}.$$

985. Обозначим буквой σ искомую площадь треугольника MKL (рис. 207). На основании теоремы о свойствах параллельных сечений пирамиды имеем

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{AP^2}{AO_1^2} = \frac{\left(AO + \frac{1}{2}OO_1\right)^2}{AO_1^2} = \frac{\left(\frac{2}{3}AO_1 + \frac{1}{6}AO_1\right)^2}{AO_1^2} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

Отсюда $\sigma = \frac{25}{36} S$.

986. Чтобы провести плоскость через центр основания O (рис. 208) параллельно ребрам BC и AD, достаточно провести через O прямую $LK \parallel BC$, через точку L пересечения LK с ребром AC прямую $LN \parallel AD$ и через прямые LK и LN плоскость. Последняя и будет та, о которой говорится в задаче. Сечение $LNMK$ есть прямоугольник. Действительно, построенная плоскость параллельна ребру CB и поэтому она пересекает боковые грани, проходящие через это ребро по прямым, параллельным ребру CB. Поэтому $MN \parallel LK$. Точно так же $LN \parallel MK$, так что $LNMK$ — параллелограмм. Кроме того, по теореме о трех перпендикулярах, $BC \perp AD$ и, следовательно, $LNMK$ — прямоугольник. Очевидно, $KL \frac{2}{3} CB = \frac{2}{3} a$, $KM = \frac{1}{3} AD = \frac{1}{3} l$, а искомая площадь $S = \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{3} l = \frac{2}{9} al$.

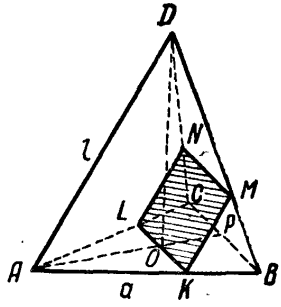


Рис. 208

987. Так как грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то в основание можно вписать окружность, и вершина M пирамиды проектируется в центр O этой окружности (рис. 209). Искомый объем $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MO$. Определим высоту $MO = \sqrt{EM^2 - EO^2}$. Из чертежа основания $ABCD$ видно, что $h = BK = 2 \cdot EO$. Следовательно, $EO = \frac{1}{2} h$. Определим теперь EM из $\triangle EMF$. Площадь его $S = \frac{1}{2} ME^2 \sin\alpha$ и $ME = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$. Таким образом, найдена высота $MO = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha} - \frac{1}{4} h^2}$. Найдем площадь основания. $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} BK$, а так как по свойству описанного четырехугольника $AD + BC = AB + CD$ и в силу равнобедренности трапеции $AB = CD$, то $AD + BC = 2 \cdot AB$ и $S_{ABCD} = AB \cdot BK = AB \cdot h$. Остается определить AB. Из подобия треугольников ABK и ENO имеем $AB : BK = EO : EN$. Но $BK = h$, $EO = \frac{1}{2} h$, поэтому $AB = BK \cdot \frac{EO}{EN} = \frac{h^2}{2 \cdot EN}$. Из $\triangle EMN$ находим

$$EN = EM \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \sqrt{S \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда:

$$AB = \frac{h^2}{2\sqrt{S \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}; \quad S_{ABCD} = \frac{h^3}{2\sqrt{S \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}},$$

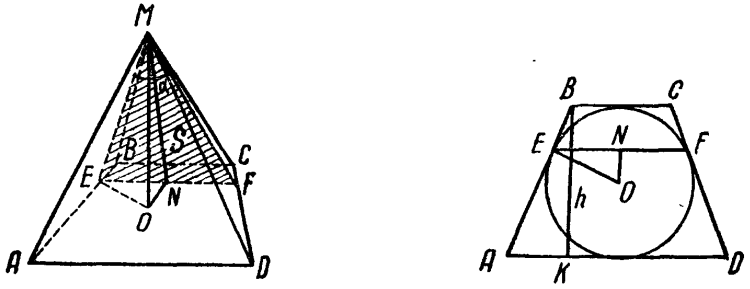


Рис. 209

а искомый объем

$$V = \frac{h^3}{6\sqrt{S \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha} - \frac{h^2}{4}} = \frac{h^3}{12\sqrt{2S}\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{8S - h^2\sin\alpha}.$$

988. Пусть сечение, площадь S которого нужно найти, есть KLM (рис. 210). Основание KL этого треугольника мы найдем, воспользовавшись тем, что $\triangle OKB \sim \triangle DCB$ и $\triangle KOC \sim \triangle BAC$. Получим $\frac{KO}{b} = \frac{h_2}{h}$; $\frac{KO}{a} = \frac{h_1}{h}$, а сложив эти равенства, найдем, что $\frac{KO}{b} + \frac{KO}{a} = \frac{h_2 + h_1}{h} = 1$; $KO = \frac{ab}{a+b}$. Точно так же убедимся, что $OL = OK = \frac{ab}{a+b}$, так что $KL = \frac{2ab}{a+b}$. Высота треугольного сечения $MO_1 = \sqrt{ME^2 + h_1^2} = \sqrt{MF^2 - FE^2 + h_1^2}$. Но $MF = FB\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $EF = h$, а h_1 найдем из ранее получен-

ного соотношения $\frac{OK}{a} = \frac{h_1}{h}$, что даст $h_1 = \frac{h}{a} OK = \frac{bh}{a+b}$. Таким образом, $S = \frac{1}{2} KL \cdot MO_1 = \frac{ab}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - h^2 + \frac{b^2h^2}{(a+b)^2}}$.

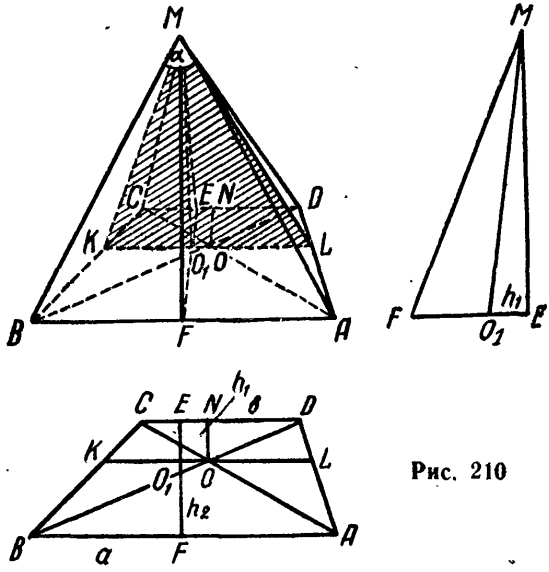


Рис. 210

989. Обозначим искомую площадь через S, а площадь $\triangle ABD$ (рис. 211) через S_1. Известно, что площадь проекции плоской фигуры равна площади проектируемой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью проекции и плоскостью фигуры. По-

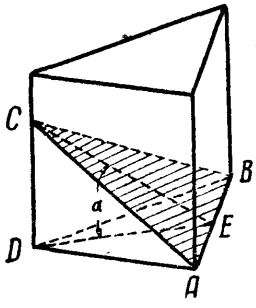


Рис. 211

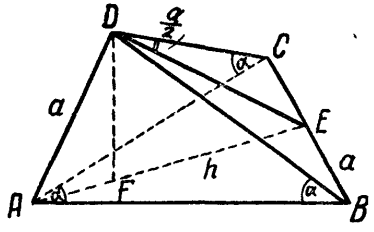


Рис. 212

этому $S_1 = S \cos \alpha$. Отсюда $S = \frac{S_1}{\cos \alpha}$, где $S_1 = \frac{AB^2 \sin 60°}{2} =$ $= AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. По условию $\frac{1}{3} S_1 \cdot CD = V$. Но так как $CD =$

$= DE \cdot \operatorname{tg}\alpha = AB \sin 60^\circ \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\alpha$, то $V = \frac{1}{3} AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \times$

$\times \frac{AB\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB^3 \operatorname{tg}\alpha}{8}$ и $AB = 2\sqrt[3]{V \operatorname{ctg}\alpha}$. Поэтому искомая площадь

$$S = \frac{S_1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt[3]{V^2 \operatorname{ctg}^2\alpha} \cdot \sqrt{3}}{\cos\alpha}.$$

990. Пусть $DABC$ (рис. 212) — данная пирамида. Проведем высоту DE грани DCB и высоту DF пирамиды. Их основания E и F, очевидно, будут лежать на высоте AE треугольника ABC. Обозначим $x = AE = DE$. Тогда искомый объем V можно записать так:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} CB \cdot AE \cdot DF = \frac{1}{6} ax \cdot DF =$$

$$= \frac{1}{6} ax \sqrt{AD^2 - AF^2} = \frac{1}{6} ax \sqrt{a^2 - AF^2}.$$

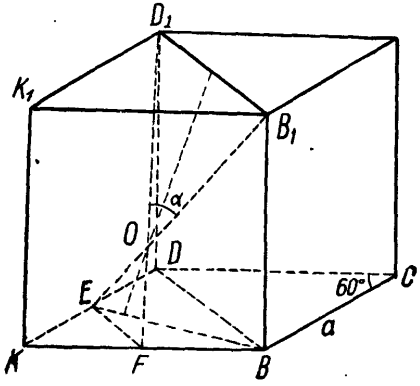


Рис. 213

Величина $AF = y$ найдется, если сравнить два выражения для DF^2, полученные из треугольников ADF и EDF. Это даст:

$$a^2 - y^2 = x^2 - (x - y)^2,$$

$$a^2 = 2xy, \quad y = \frac{a^2}{2x}, \text{ где}$$

$$x = DE = CE \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$V = \frac{1}{6} ax \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4x^2}} = \frac{a^2}{12} \sqrt{4x^2 - a^2} = \frac{a^2}{12} \sqrt{a^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - a^2} =$$

$$= \frac{a^3}{12} \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12 \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

991. Обозначим площадь основания и высоту призмы соответственно S и H, так что искомый объем $V = S \cdot H = a^2 \sin 60^\circ \cdot H = \frac{a^2 H\sqrt{3}}{2}$. Из $\triangle B_1EB$ (рис. 213) получаем $H = BB_1 =$

$= \sqrt{B_1E^2 - BE^2}$, где $BE = KB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $B_1E = B_1O + OE$. Замечая, что треугольники KDB и $K_1D_1B_1$ равносторонние со сторонами a и EF — средняя линия $\triangle KDB$, находим, что

$$B_1E = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{3a}{4\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$H = \sqrt{\frac{9a^2}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2 60^\circ - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\cos\alpha - \cos 120^\circ}{2}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$V = \frac{3a^3}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

992. Обозначим сторону AB (рис. 214) основания буквой x. Искомый объем

$$V = S_{ABC} \cdot CD = \frac{1}{2}AB \cdot CE \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot AE \operatorname{tg}\alpha \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2}x \cdot \frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha \cdot CD = \frac{1}{4}x^2 \operatorname{tg}\alpha \cdot CD.$$

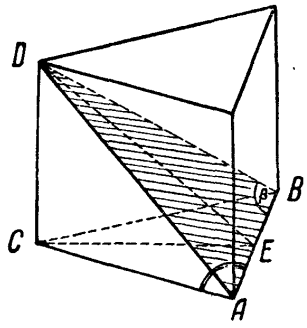


Рис. 214

Выразим CD через x:

$$CD = \sqrt{DE^2 - EC^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\operatorname{tg}\beta\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{x\sqrt{\sin^2\beta\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\beta}}{2\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{x\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Чтобы найти x, подсчитаем периметр $\triangle ABC$. Будем иметь

$$2p = AB + BC + CA = AB + 2CA = x + 2 \cdot \frac{x}{2\cos\alpha} =$$

$$= x \cdot \frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2x\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Отсюда:

$$x = \frac{p\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ а } V = \frac{1}{4}x^2\operatorname{tg}\alpha \cdot CD =$$

$$= \frac{x^3\operatorname{tg}\alpha}{8} \cdot \frac{\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{p^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}\alpha}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\beta}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)} =$$

$$= \frac{p^3\sin 2\alpha\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{16\cos^6\frac{\alpha}{2}\cos\beta}.$$

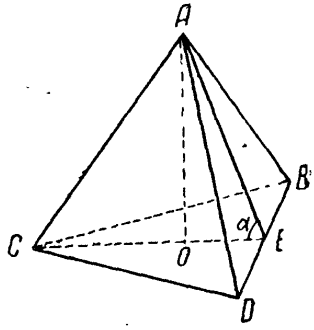


Рис. 215

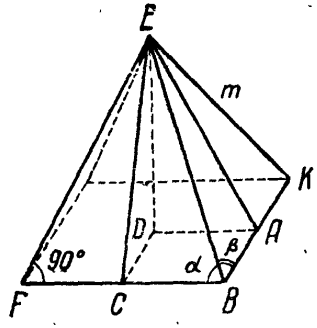


Рис. 216

993. Выразим полную поверхность S пирамиды через сторону основания $DB = x$ (рис. 215). Обозначив площадь основания пирамиды через S_1 и пользуясь формулой площади проекции плоской фигуры (см. решение задачи 989), получим

$$S = S_1 + \frac{S_1}{\cos\alpha} = S_1 \cdot \frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2S_1\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{x^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}.$$

Но

$$V=\frac{1}{3}S_1\cdot AO=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot OE\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{x^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{1}{3}CE\cdot\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}\cdot x\sin 60^\circ\operatorname{tg}\alpha=\frac{x^3}{24}\operatorname{tg}\alpha \text{ и } x=2\sqrt[3]{3V\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Подставляя значение x в найденное выражение для S, получим

$$S=\frac{2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{9V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

994. Из прямоугольных треугольников ECB, EAB и EDC (рис. 216) находим: $FB=2CB=2BE\cos\alpha=2m\cos\alpha$; $KB=2AB=2BE\cos\beta=2m\cos\beta$; $EC=EB\sin\alpha=m\sin\alpha$; $ED=\sqrt{EC^2-CD^2}=\sqrt{EC^2-AB^2}=$

$$=\sqrt{m^2\sin^2\alpha-m^2\cos^2\beta}=m\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}=$$

$$=m\sqrt{-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}}=m\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

и искомый объем

$$V=\frac{1}{3}FB\cdot BK\cdot ED=\frac{4}{3}m^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Замечание. $\cos(\alpha+\beta)<0$, так как $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$ (сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего).

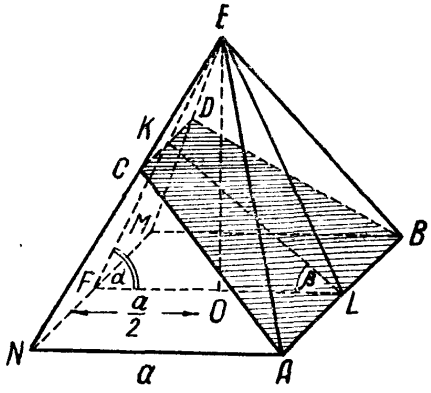


Рис. 217

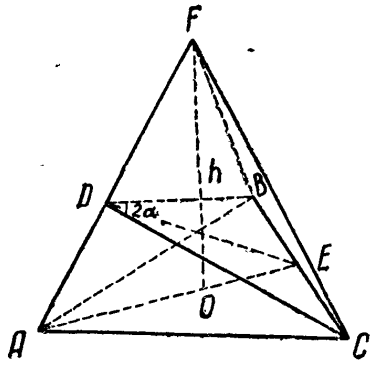


Рис. 218

995. Искомая площадь $S=\frac{AB+CD}{2}\cdot KL$ (рис. 217). По теореме синусов из $\triangle KFL$ находим

$$\frac{KL}{\sin\alpha}=\frac{KF}{\sin\beta}=\frac{FL}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Следовательно,

$$KL = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}; \; KF = \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Из подобных треугольников MNE и DCE находим:

$$CD : MN = KE : EF. \text{ Но } NM = a; \; EF = \frac{FO}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha};$$

$$KE = EF - KF = \frac{a}{2 \cos \alpha} - \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{a \sin (\alpha - \beta)}{2 \cos \alpha \sin (\alpha + \beta)}.$$

Отсюда

$$CD = MN \cdot \frac{KE}{EF} = a \cdot \frac{a \sin (\alpha - \beta) \cdot 2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha \sin (\alpha + \beta) \cdot a} = \frac{a \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Поэтому

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot KL = \frac{1}{2} \left[a + \frac{a \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)} \right] \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} =$$

$$= a \frac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{2 \sin (\alpha + \beta)} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{a^2 \sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}.$$

996. Обозначим сторону основания CB буквой x (рис. 218). Тогда искомый объем

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC^2 \sin 60^\circ \cdot FO = \frac{x^2 \sqrt{3}}{6} \frac{2}{h} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{12} \cdot h.$$

Из подобия треугольников AFO и ADE (прямоугольные, имеющие общий $\angle FAE$) получаем $AE : DE = AF : FO$. Но

$$AE = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{x \sqrt{3}}{2}; \; DE = CE \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$OF = h \text{ и } AF = FO \cdot \frac{AE}{DE} = h \cdot \frac{x \sqrt{3} \cdot 2}{2x \operatorname{ctg} \alpha} = \sqrt{3} \cdot h \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Из $\triangle AFO : AF^2 = AO^2 + OF^2$, а так как $AO = \frac{2}{3} AE = \frac{\sqrt{3}}{3} x$;

$$OF = h; \; AF = h \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha, \text{ то } (h \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} x \right)^2 + h^2;$$

$$3h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3} x^2 + h^2; \quad \frac{1}{3} x^2 = 3h^2 \operatorname{tg} \alpha - h^2;$$

$$x^2 = 9h^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 30^\circ) = 9h^2 \frac{\sin (\alpha + 30^\circ) \cdot \sin (\alpha - 30^\circ)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 30^\circ} =$$

$$= \frac{12\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos^2\alpha}h^2.$$

Итак, $V = \frac{x^2\sqrt{3}}{12}\cdot h = \frac{\sqrt{3}\,h^3\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos^2\alpha}$.

997. На рис. 219 изображена часть n-угольной пирамиды. $\angle ACB = 2\alpha$ есть двугранный угол при боковом ребре. Найдем площадь основания

$$S = n\cdot S_{OBE} = n\cdot\frac{1}{2}BE\cdot OK = n\times$$

$$\times\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = n\cdot a^2\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Определим высоту пирамиды OM. Из подобия треугольников OME и CDE имеем $OM : CD = EO : EC$. Но

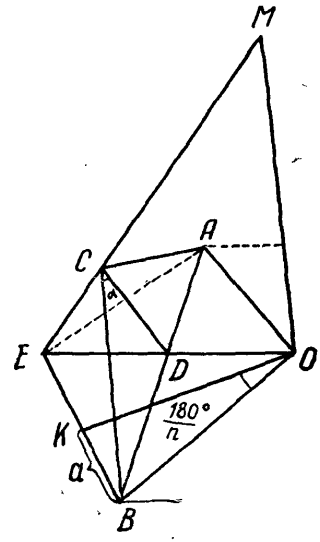


Рис. 219

$$OE = OB = \frac{KB}{\sin\frac{180^\circ}{n}} =$$

$$= \frac{a}{\sin\frac{180^\circ}{n}};\ CD = BD\cdot\operatorname{ctg}\alpha =$$

$$= BE\cdot\cos\angle DBE\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 2a\cos\frac{180^\circ}{n}\operatorname{ctg}\alpha,\ \angle DBE = \angle KOB;$$

$$EC = \sqrt{ED^2 - CD^2} = \sqrt{\left(EB\sin\frac{180^\circ}{n}\right) - CD^2} =$$

$$= \sqrt{\left(2a\sin\frac{180^\circ}{n}\right)^2 - \left(2a\cos\frac{180^\circ}{n}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{2a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin\frac{180^\circ}{n}\sin^2\alpha - \cos^2\frac{180^\circ}{n}\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{2a}{\sin\alpha}\sqrt{-\cos\left(\frac{180^\circ}{n}+\alpha\right)\cos\alpha\left(\frac{180^\circ}{n}-\alpha\right)}.$$

Поэтому искомый объем

$$V = \frac{1}{3}\cdot S\cdot OM = \frac{1}{3}S\cdot CD\cdot\frac{EO}{EC} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{na^2 \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} \cdot 2a\cos\frac{180^\circ}{n} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \frac{a}{\sin\frac{180^\circ}{n}}}{\frac{2a}{\sin\alpha}\sqrt{-\cos\left(\frac{180^\circ}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}-\alpha\right)}} =$$

$$= \frac{na^3 \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}}{3 \cdot \sqrt{-\cos\left(\frac{180^\circ}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}-\alpha\right)}}.$$

Замечание. $\cos\left(\frac{180^\circ}{n}+\alpha\right) < 0$, так как $\frac{180^\circ}{n}+\alpha > 90^\circ$.

Действительно, $\angle EBD = \frac{180^\circ}{n} > \angle CBD$, потому что $\operatorname{tg}\angle EBD = \frac{ED}{BD} > \frac{CD}{BD} = \operatorname{tg}\angle CBD$. Отсюда $\frac{180^\circ}{n}+\alpha > \angle CBD + \angle BCD = 90^\circ$.

998. Плоскость сечения AEF (рис. 220), очевидно, не может быть перпендикулярна к грани ADC, потому что, опустив перпендикуляры из вершины D на линии AE и AF, легко убедиться в равенстве их, что невозможно, так как первый из них был бы одновременно перпендикуляром к плоскости, а второй — наклонной к ней. Это же ясно и из свойств симметрии: перпендикулярность к плоскости ADC влечет за собой и перпендикулярность к плоскости ADB. Поэтому плоскость сечения перпендикулярна к плоскости BDC. Обозначим сторону основания буквой x и выразим через нее площадь основания и боковую поверхность пирамиды:

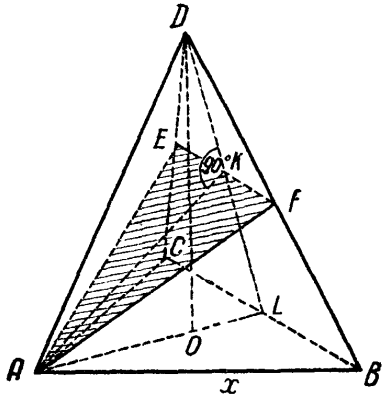


Рис. 220

$$S_1 = \frac{1}{2} AB^2 \sin 60^\circ = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

(S_1 — площадь основания);

$$S_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot DL$$

(S_2 — площадь боковой поверхности). Здесь $BC = x$, а DL найдем из подобных треугольников DOL и KAL (они прямоугольные и имеют

общий $\angle DLA$). $DL : AL = OL : KL$. Но $AL = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $OL = \frac{1}{3}AL = \frac{x\sqrt{3}}{6}$, $KL = \frac{1}{2}DL$. Поэтому получаем:

$$DL \cdot KL = OL \cdot AL;\quad DL \cdot \frac{1}{2}DL = \frac{x\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2};\quad DL^2 = \frac{x^2}{2};$$

$$DL = \frac{x}{\sqrt{2}} \text{ и } S_2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{2}};\quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{3x^2 \cdot 4}{2\sqrt{2}\sqrt{3}x^2} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

999. $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot OM$ (рис. 221); $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE =$

$$= \frac{BC + 2DE + BC}{2} \cdot CE = (BC + DE) \cdot CE =$$

$$= (a + a\cos\alpha)\, a \sin\alpha = a^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha = 2a^2 \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Для определения высоты OM пирамиды замечаем, что ввиду одинакового наклона ребер к основанию вершина пирамиды проектируется в центр O описанного около основания круга, радиус которого есть AO. Найдем этот радиус. Для этого, описав вокруг тра-

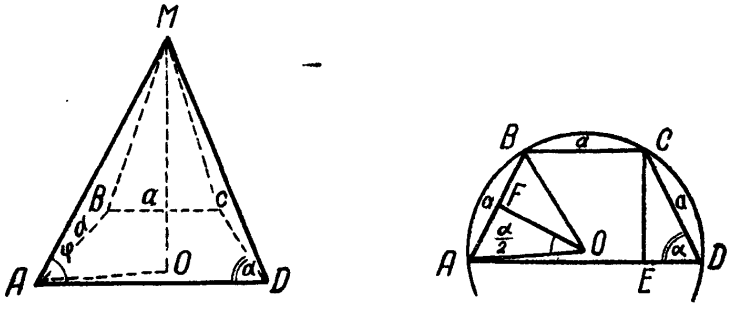


Рис. 221

пеции круг, замечаем, что так как хорды AB, BC и CD равны между собой, то равны и соответствующие им дуги. Отсюда заключаем, что центральный $\angle AOB = \alpha$, потому что соответствующая ему $\smile AB = \frac{1}{2}AC$. Теперь из $\triangle OFA$ получаем

$$AO = \frac{AF}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Из $\triangle MOA$ находим

$$MO = AO \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \operatorname{tg}\varphi.$$

Поэтому

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

1000. Пусть $KN=h$ и $KL=a$ (рис. 222). Обозначим высоту MO буквой H, тогда $MK=\frac{1}{2}H$. Заметив, что $MN=\sqrt{MK^2-KN^2}=\sqrt{\frac{1}{4}H^2-h^2}$ и $ML=\sqrt{MK^2-KL^2}=\sqrt{\frac{1}{4}H^2-a^2}$, воспользуемся двумя парами подобных треугольников: MOB и MKN; MOP и MKL. Из первой пары имеем: $\frac{KN}{BO}=\frac{MN}{MO}$ или $BO=MO\cdot\frac{KN}{MN}=H\cdot\frac{h}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-h^2}}$; из второй: $\frac{OP}{KL}=\frac{MO}{ML}$ или $OP=KL\cdot\frac{MO}{ML}=a\times\frac{H}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-a^2}}$. Но так как $OP=PB$, то $OB^2=OP^2+PB^2=2\cdot OP^2$. Отсюда:

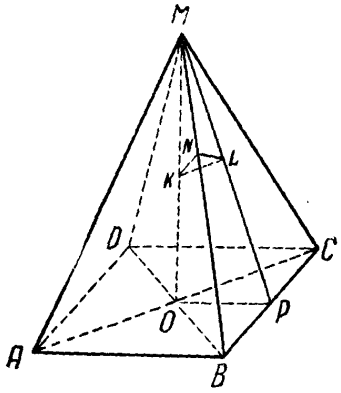


Рис. 222

$$\left(\frac{Hh}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-h^2}}\right)^2=2\cdot\left(\frac{Ha}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-a^2}}\right)^2;\quad h^2\left(\frac{1}{4}H^2-a^2\right)=2a^2\left(\frac{1}{4}H^2-h^2\right);\quad H=\frac{2ah}{\sqrt{2a^2-h^2}}.$$

Найдем сторону основания

$$BC=2\cdot BP=2\cdot OP=2\cdot\frac{aH}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-a^2}}=2\cdot\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2h^2}{2a^2-h^2}-a^2}}\cdot\frac{2ah}{\sqrt{2a^2-h^2}}=\frac{2\sqrt{2}\,ah}{\sqrt{h^2-a^2}}.$$

Поэтому

$$V=\frac{1}{3}\cdot BC^2\cdot MO=\frac{16a^3h^3}{3(h^2-a^2)\sqrt{2a^2-h^2}}.$$

1001. Полная поверхность $S = S_{ABC} + 3 \cdot S_{CMB}$ (рис. 223). Но $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB \sin 60° = \frac{q^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{CMB} = \frac{1}{2} CB \cdot MF = \frac{1}{2} q \sqrt{CM^2 - CF^2} = \frac{1}{2} q \sqrt{CM^2 - \frac{q^2}{4}}$. Остается определить CM. Положим $CD = my$, $MD = ny$. Так как $\triangle MCO \sim \triangle ECD$ (прямоугольные треугольники, имеющие общий угол MCE), то $CE : CD = CM : CO$. Но $CE = CB \sin 60° = \frac{q\sqrt{3}}{2}$; $CO = \frac{2}{3} CE = \frac{q}{3}\sqrt{3}$; $CD = my$; $CM = (m+n)y$. Отсюда получаем, что $CE \cdot CO = CD \cdot CM$ или $\frac{q\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{q}{3}\sqrt{3} = my(m+n)y$ и $y = \frac{q}{\sqrt{2m(m+n)}}$, а $CM = (m+n)y = \frac{(m+n)q}{\sqrt{2m(m+n)}} = \frac{q}{2m}\sqrt{2m(m+n)}$.

Таким образом,

$$S_{CMB} = \frac{1}{2} q \sqrt{CM^2 - \frac{1}{4} q^2} = \frac{1}{2} q \sqrt{\frac{q^2(m+n)}{2m} - \frac{1}{4} q^2} =$$

$$= \frac{1}{4} q^2 \sqrt{\frac{2m + 2n - m}{m}} = \frac{q^2}{4m}\sqrt{(m+2n)m};$$

$$S = \frac{q^2\sqrt{3}}{4} + 3q^2 \frac{\sqrt{(m+2n)m}}{4m} = \frac{q^2\sqrt{3}}{4m}[m + \sqrt{3m(m+2n)}].$$

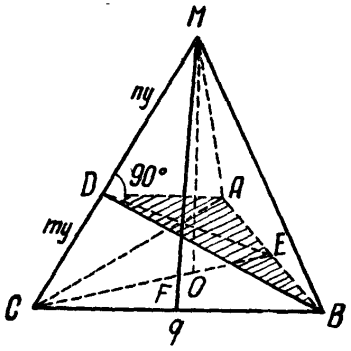


Рис. 223

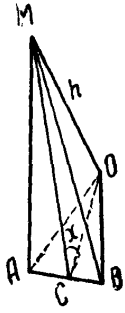


Рис. 224

1002. Сумма внутренних углов многоугольника равна $180°(m-2) = 90°n$, $2(m-2) = n$, $m = \frac{n}{2} + 2$. Обозначим $\angle MCO$ буквой x

(рис. 224, на котором изображена $\frac{1}{m}$ часть всей пирамиды). По условию $\frac{S_{бок}}{S_{осн}} = k$. Отсюда получаем:

$$\frac{m \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MC}{m \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC} = k; \quad \frac{MC}{OC} = k \text{ или } \cos x = \frac{OC}{MC} = \frac{1}{k}.$$

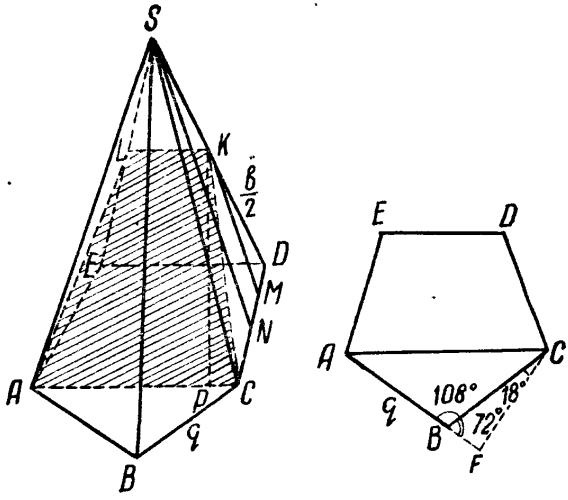


Рис. 225

Найдем теперь площадь основания

$$S_{осн} = m \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OC = m \cdot AC \cdot OC = m \cdot OC \cdot \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2m} \cdot OC =$$

$$= m \cdot OC^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n+4}.$$

Из $\triangle MOC$ находим

$$OC = OM \operatorname{ctg} x = h \operatorname{ctg} x = \frac{h \cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Следовательно,

$$S_{осн} = \frac{mh^2}{k^2 - 1} \cdot \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n+4} \text{ и } V = \frac{(n+4)\, h^3}{6\,(k^2 - 1)} \cdot \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n+4}.$$

Замечание. OC можно найти и без применения тригонометрии. Действительно, из равенства $\frac{CM}{OC} = k$ находим $CM = OC \cdot k$, а из $\triangle MOC$ найдем $(OC \cdot k)^2 = OC^2 + h^2$ или $OC = \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}$.

1003. Найдем длины LK, AC и KP (рис. 225), нужные для вычисления искомой площади трапеции $ALKC$. Из подобия треугольников SLK и SED получим: $\frac{LK}{ED} = \frac{SK}{SD} = \frac{1}{2}$; $LK = \frac{1}{2} ED = \frac{q}{2}$. Чтобы найти AC, обращаемся к рисунку основания. Так как $\angle ABC = 108°$, то $\angle CBF = 180° - 108° = 72°$, $\angle BCF = 18°$. Таким образом, BF есть половина стороны десятиугольника, вписанного в окружность радиуса q. Поэтому $BF = \frac{\sqrt{5}-1}{4} q$ и $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BF = q^2 + q^2 + 2q \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} q = q^2 \frac{2\sqrt{5}+6}{4}$; $AC = \frac{q}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+6} = \frac{q}{2}(\sqrt{5}+1)$. Величину AC просто вычислить и тригонометрически: $AC = 2 \cdot AB \cos 36° = 2q \cos 36° = 2q \times \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{q}{2}(\sqrt{5}+1)$. Высота $KP = \sqrt{KC^2 - PC^2}$. Но $PC = \frac{1}{2}(AC - LK) = \frac{1}{2}\left[\frac{q}{2}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2}q\right] = \frac{q\sqrt{5}}{4}$; $KC^2 = KD^2 + CD^2 - 2 \cdot CD \cdot DM = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + q^2 - 2q \cdot \frac{q}{4}$ (потому что из подобия треугольников SND и KMD вытекает, что

$$MD = \frac{1}{2} ND = \frac{1}{4} CD = \frac{1}{4} q, \text{ т. е. } KC^2 = \frac{b^2 + 2q^2}{4}.$$

Итак,

$$KP = \sqrt{\frac{b^2 + 2q^2}{4} - \frac{5q^2}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2 + 3q^2}.$$

Отсюда находим

$$Q = \frac{AC + LK}{2} \cdot KP = \frac{1}{2}\left(q \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{1}{2} q\right) \cdot \frac{1}{4}\sqrt{4b^2 + 3q^2} =$$

$$= \frac{q}{16}(\sqrt{5}+2)\sqrt{4b^2 + 3q^2}.$$

1004. Пусть плоскость, рассекающая основание пирамиды на два многоугольника, есть AMB (рис. 226). Многоугольник ABD имеет $(r+2)$ вершины, а $ABNLK$ имеет $(n-r)$. Искомый объем

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} n \cdot \frac{1}{2} OB^2 \cdot \sin\frac{360°}{n} \cdot OM =$$

$$= \frac{n}{6}\left(\frac{CB}{\sin \angle COB}\right)^2 \sin\frac{360^\circ}{n} \cdot OC \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{6}\left[\frac{b}{2\sin\dfrac{180^\circ(r+1)}{n}}\right]^2 \times$$

$$\times OC \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\frac{360^\circ}{n} = \frac{n}{6} \cdot \frac{b^2}{4\sin^2\dfrac{180^\circ(r+1)}{n}} \cdot \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ(r+1)}{n} \times$$

$$\times \sin\frac{360^\circ}{n} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{nb^2\cos\dfrac{180^\circ(r+1)}{n} \cdot \sin\dfrac{360^\circ}{n} \cdot \operatorname{tg}\alpha}{48\sin^3\dfrac{180^\circ(r+1)}{n}}.$$

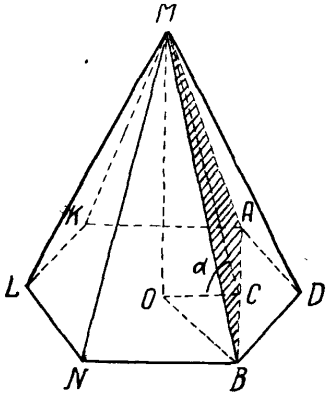


Рис. 226

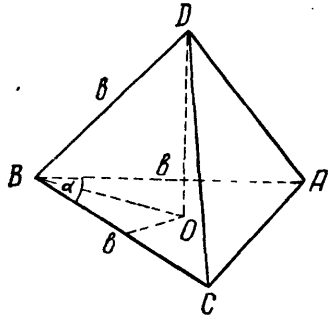


Рис. 227

Замечание. Из условия $r < \frac{n-2}{2}$ следует, что $r+2 < \frac{n}{2}+1$, а $n-r > \frac{n}{2}+1$, т. е. что $r+2 < n-r$ и угол AOB (см. рис. 226), соответствующий многоугольнику с меньшим числом сторон, всегда будет меньше 180°.

1005. Обозначив площадь основания пирамиды буквой S, а ее высоту H и пользуясь рис. 227, получим:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin\alpha = \frac{1}{2}b^2\sin\alpha;$$

$$H = DO = \sqrt{BD^2 - BO^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{b}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{b}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2 60^\circ} =$$

$$= \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\cos\alpha - \cos 120^\circ}{2}} =$$

$$= \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 \sin\alpha}{2} \cdot \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{3} b^3 \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

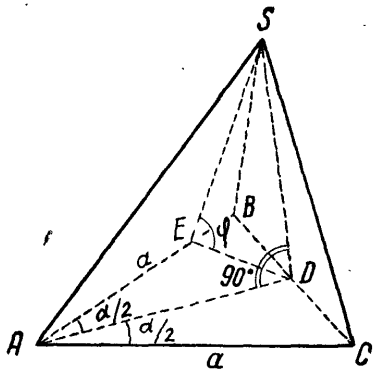


Рис. 228

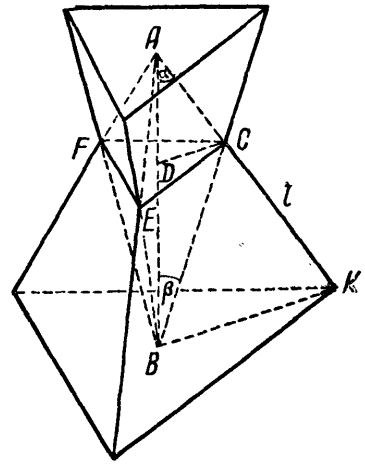


Рис. 229

1006. Так как площади треугольников SAC и SAB равны (рис. 228), то искомая боковая поверхность

$$Q = \frac{1}{2} BC \cdot SD + 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot SE. \text{ Но } AB = a;$$

$$BC = 2 \cdot BD = 2 \cdot AB \sin\frac{\alpha}{2} = 2a \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$SE = \frac{ED}{\cos\varphi} = \frac{AD \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\varphi} = \frac{AB \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\varphi} = \frac{a \sin\alpha}{2\cos\varphi};$$

$$SD = SE \cdot \sin\varphi = \frac{a \sin\alpha}{2\cos\varphi} \sin\varphi; \; Q = \frac{1}{2} \cdot 2a \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a \sin\alpha}{2\cos\varphi} \sin\varphi +$$

$$+ a \cdot \frac{a \sin\alpha}{2\cos\varphi} = \frac{a^2 \sin\alpha}{2\cos\varphi}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi + 1\right).$$

1007. Искомый объем V состоит из объемов двух пирамид, имеющих одно и то же основание ECF (рис. 229) и высоты AD и DB. Обозначим площадь основания буквой S. Имеем $V = \frac{1}{3} S \cdot AD + \frac{1}{3} S \cdot DB = \frac{1}{3} S \cdot (AD + DB) = \frac{1}{3} S \cdot AB$, где $AB = AK \cdot \cos\alpha = l\cos\alpha$. Чтобы вычислить площадь S правильного треугольника, найдем радиус CD описанного около него круга:

$$AB = l\cos\alpha = AD + DB = CD \cdot \operatorname{ctg}\alpha + CD \cdot \operatorname{ctg}\beta =$$

$$= CD(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = CD \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};\ CD = \frac{l\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

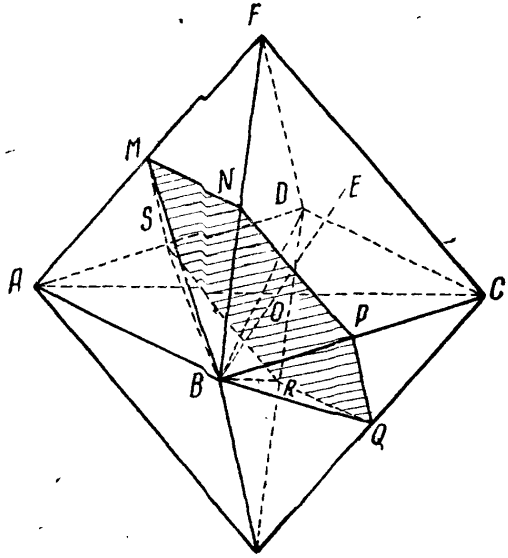


Рис. 230

Отсюда

$$V = \frac{1}{3} S \cdot AB = \frac{1}{3} EC^2 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{2} \cdot AB =$$

$$= \frac{1}{3}(CD\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{4} CD^2 \cdot AB =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, l^3 \sin^2\alpha\cos^3\alpha\sin^2\beta}{4\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

1008. Приведем плоскость $MNPQRS$ (рис. 230) через центр октаэдра параллельно какой-нибудь грани, например CFD. Она образует в сечении с октаэдром шестиугольник с вершинами в серединах M, N, P, Q, R и S шести ребер октаэдра. Этот шестиугольник правильный, так как каждая его сторона равна половине

ребра октаэдра, а каждый угол между соседними сторонами равен 120°, потому что стороны шестиугольника параллельны сторонам правильного $\triangle CDF$. Соединим все вершины этого многоугольника с вершиной B октаэдра. Получим пирамиду с высотой $BO = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} h$, где h — высота пирамиды $BCDF$. Обозначим площадь многоугольника $MNPQRS$ буквой σ, а объем пирамиды $BCDF$ — буквой V_2. Тогда для искомого объема V_1 найдем, что $V_1 = \frac{1}{3}\sigma \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{h}{2}$, где a — ребро октаэдра. Итак, $V_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} h = \frac{3}{4} V_2 = \frac{3}{16} V$.

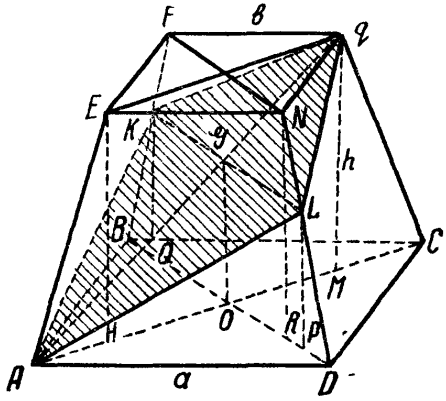


Рис. 231

1009. Из симметрии пирамиды ясно, что $Kq = Lq$ и $AK = AL$ (рис. 231). Следовательно, $LK \perp Aq$. Поэтому искомая площадь $S = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot Aq$. Из прямоугольного $\triangle AqM$ находим

$$Aq = \sqrt{AM^2 + qM^2}. \quad \text{Но } qM = h, \text{ а } AM = AC - CM =$$

$$= AC - \frac{AC - Eq}{2} = \frac{AC + Eq}{2} = \frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому

$$Aq = \sqrt{\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2} + h^2}.$$

Для вычисления отрезка KL заметим, что линия $KL \parallel BD$, потому

что KL и BD лежат в плоскости $BDNF$ и пересечься не могут в силу параллельности BD и плоскости $ALqK$. Из чертежа ясно, что $KL = BD - PD - BD = BD - 2 \cdot PD = a\sqrt{2} - 2 \cdot PD$. Остается найти PD. Так как $\triangle NRD \sim \triangle LPD$, то можно записать $\frac{PD}{LP} = \frac{RD}{NR}$. Но $NR = h$, $RD = MC = \frac{AC - Eq}{2} = \frac{a\sqrt{2} - b\sqrt{2}}{2} = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$, $LP = OG$, а GO из подобных треугольников qAM и GAO определяется так:

$$\frac{GO}{AO} = \frac{qM}{AM}, \quad OG = \frac{qM}{AM} \cdot AO = \frac{h\sqrt{2}}{a+b} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{ah}{a+b} = LP.$$

Таким образом,

$$PD = LP \cdot \frac{RD}{NR} = \frac{ah}{a+b} \cdot \frac{a-b}{\sqrt{2}h} = \frac{(a-b)a}{(a+b)\sqrt{2}}, \text{ а}$$

$$KL = a\sqrt{2} - 2 \cdot PD = a\sqrt{2} - 2 \cdot \frac{(a-b)a}{(a+b)\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}ab}{a+b}.$$

Следовательно, площадь

$$S = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot Aq = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}ab}{a+b} \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2} + h^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}ab}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2} + h^2}.$$

1010. Проведем плоскость LDE (рис. 232) через точки L и E касания шара с двумя гранями пирамиды и его центр O. Эта плоскость, как проходящая через перпендикуляры OE и OL к этим граням, будет перпендикулярна к граням, а значит, и к линии их пересечения. Поэтому $\angle LDE = \varphi$, плоскость LDE пересечет CF в точке F под прямым углом. Отсюда ясно, что отрезок FD, равный высоте ромба, разделится точкой касания E пополам. Следовательно, можно написать:

$$r = DE \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} DF \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{AC}{2} \sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} =$$

$$= \frac{a}{2} \sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}; \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^3}{6} \sin^3\alpha \operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}.$$

1011. Опустим перпендикуляр AO (рис. 233) на плоскость основания пирамид. Он, очевидно, пройдет через центр шара. Проведем апофему AB пирамиды. Она будет касательной к шаровой поверхности. Соединим основание O перпендикуляра AO и основа-

ние B апофемы AB. Получим прямоугольный треугольник AOB и из него находим, что радиус шара

$$r = OC = OB \cdot \sin \angle CBO = \frac{a}{2} \sin \angle CBO = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \angle CBO} =$$

$$= \frac{a}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{OB}{AB}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{BD}{AB}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

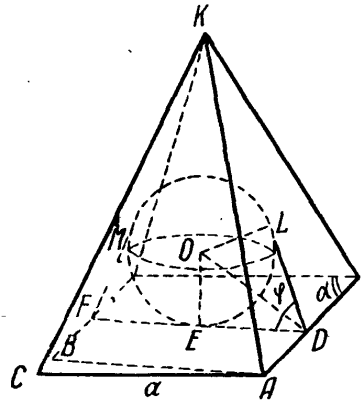


Рис. 232

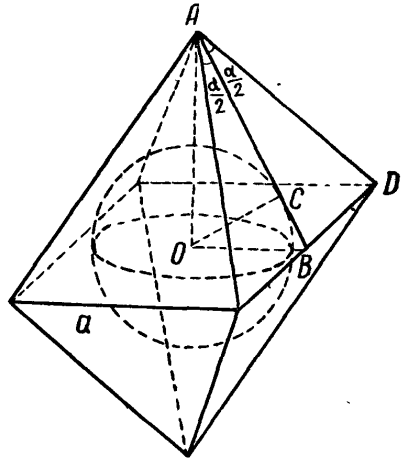


Рис. 233

1012. Искомая поверхность S состоит из трех равных сегментных поверхностей. На рис. 234 эти поверхности расположены впереди куба, ниже его и левее. Шаровая поверхность касается ребер, сходящихся в вершине E, и граней, пересекающихся в вершине F. Обозначая радиус сферы $r = OA = OL = OB$ и пользуясь формулой сегментной поверхности, получим

$$S = 3 \cdot 2\pi r \cdot CD = 6\pi r \cdot MB = 6\pi r (AB - AM) = 6\pi r (2r - a).$$

Для определения r обратимся к равнобедренному прямоугольному $\triangle OKL$. Из него найдем $OL = OK\sqrt{2}$, и так как $OL = r$, а $OK = OM = AM - OA = a - r$, то $r = (a - r)\sqrt{2}$, $r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} =$ $= a(2 - \sqrt{2})$. Поэтому

$$S = 6\pi r(2r - a) = 6\pi a^2\left(2 - \sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right) =$$

$$= 6\pi a^2\left(10 - 7\sqrt{2}\right).$$

1013. $V = S \cdot H = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot EF = \frac{1}{2} \frac{DB}{\sin\alpha} \cdot \frac{DB}{\cos\alpha} \cdot EF =$

$= \frac{h^2 \cdot EF}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{h^2}{\sin 2\alpha} \cdot EF$ (рис. 235). Остается определить

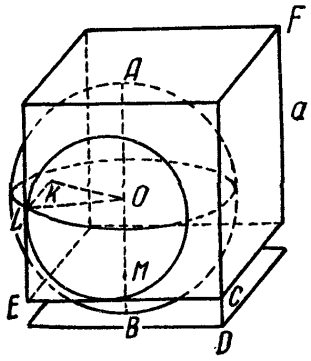


Рис. 234

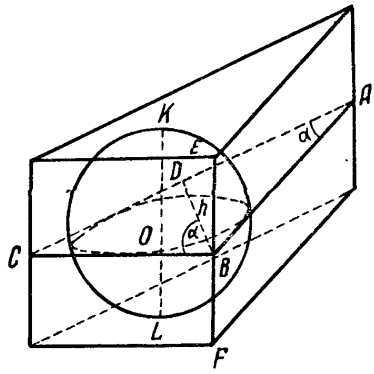


Рис. 235

высоту EF. Она равна диаметру шара KL или иначе — диаметру вписанного в $\triangle ABC$ круга. Последний можно определить по формуле $2r = \frac{2S}{p}$. Для этого определим AC.

$$AC = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{DB}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}; \quad 2p = AB + BC + AC =$$

$$= \frac{h}{\cos\alpha} + \frac{h}{\sin\alpha} + \frac{h}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \cdot h =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha} \cdot h = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha} \cdot h =$$

$$= \frac{h\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha}; \quad EF = 2r = \frac{2S}{p} = \frac{2h^2 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin 2\alpha \cdot h\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}h \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha}{4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}h}{2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$V = \frac{h^2}{\sin 2\alpha} \cdot EF = \frac{\sqrt{2}h^3}{\cdot 2\sin 2\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

1014. Пусть $ABCD$ (рис. 236) данный тетраэдр. Проведем через ребро AB плоскость, параллельную противоположному ребру CD. Такая плоскость будет единственная и ее можно построить так: взять точку K на AB, провести прямую $C_1D_1 \parallel CD$; тогда плоскость, проходящая через AB и C_1D_1, будет требуемой. Затем таким же способом построим плоскость, проходящую через ребро CD и параллельную противоположному ребру AB. Эти две плоскости будут параллельны. Построив для каждой пары противоположных ребер тетраэдра параллельные плоскости, мы получим многогранник, который, очевидно, является кубом с диагональю грани, равной a. Шар, касающийся ребер тетраэдра, окажется вписанным в построенный куб, причем его диаметр будет равен ребру куба. Поэтому искомый радиус

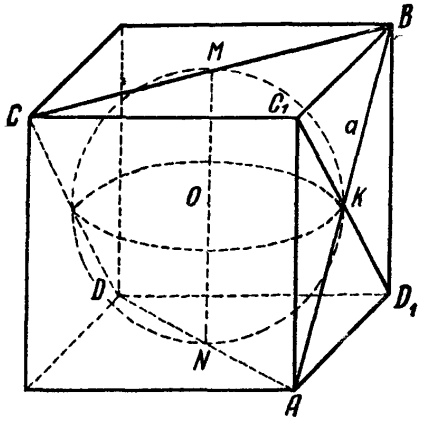


Рис. 236

$$R = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

1015. Обозначим буквой φ угол O_1MS (рис. 237) при ребре основания данной пирамиды. Искомая полная поверхность

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = AB^2 + \frac{AB^2}{\cos\varphi} = AB^2 \cdot \frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi} =$$

$$= MN^2 \cdot \frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi} = \left(2R \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi} =$$

$$= 4R^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi} = 4R^2 \frac{(1+\cos\varphi)^3}{\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi}.$$

Остается найти $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Проведем плоскость OEF через центр O шара и через точки E и F касания его с двумя смежными боковыми гранями. Эта плоскость перпендикулярна к граням, на которых лежат точки E и F, и, следовательно, перпендикулярна к линии их пересечения, т. е. к ребру SB. Поэтому $\angle EPF = \alpha$, где P — точка пересечения ребра SB с построенной плоскостью. Из четырехугольника $OEPF$ находим $EF = 2EQ = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$. С другой

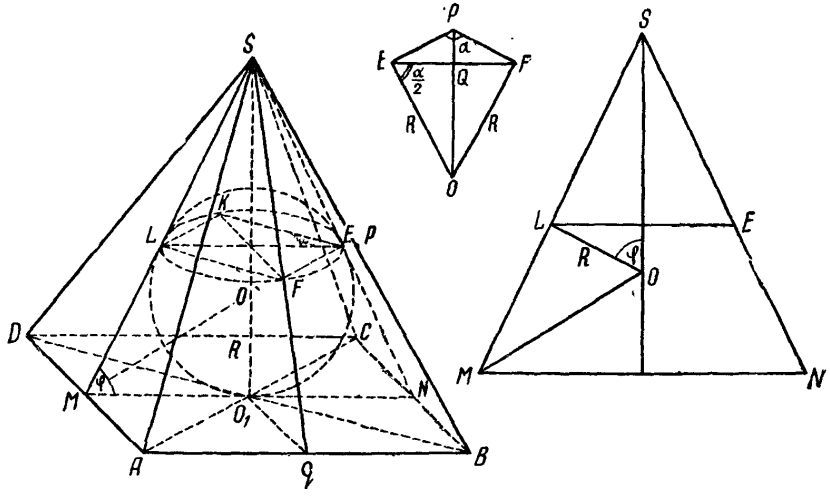


Рис. 237

стороны, четырехугольник $EFLK$, где L и K — точки касания шара с двумя другими гранями пирамиды, есть квадрат и поэтому

$$EF = \frac{1}{2}LE\sqrt{2} = \sqrt{2}R\sin\varphi = 2R\cos\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\sin\varphi = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \quad \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-2\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{-\cos\alpha}; \quad S = 2R^2\frac{\left(1+\sqrt{-\cos\alpha}\right)^3}{\sqrt{-\cos\alpha}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

1016. Так как боковые ребра DA, DB и DC (рис. 238) данной пирамиды равны, то высота DO проектируется в центр O описанного около треугольника ABC круга, искомый объем $V_1 = \frac{1}{3}S\cdot DO$, где S — площадь $\triangle ABC$. По условию задачи $V = \frac{1}{3}\pi R^2\cdot DO$,

где R — радиус основания конуса. Отсюда $DO = \frac{3V}{\pi R^2}$ и $V_1 = \frac{VS}{\pi R^2}$.

Обозначим боковое ребро пирамиды буквой x. Тогда можно написать:

$$AB = 2x\sin\frac{\alpha}{2};\ BC = 2x\sin\frac{\beta}{2};\ AC = 2x\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Воспользовавшись теперь формулами

$$R = \frac{abc}{4S} \text{ и } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

получим

$$V_1 = \frac{V}{\pi \cdot AB^2 \cdot BC^2 \cdot AC^2} \cdot 16S^3 = \frac{V}{4\pi}\operatorname{cosec}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\beta}{2} \times$$

$$\times \operatorname{cosec}^2\frac{\gamma}{2}\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^3} \times$$

$$\times \sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)^3 \cdot \left(\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3} \times$$

$$\times \left(\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)^3.$$

1017. Если соединить концы B, C и K (рис. 239) этих хорд между собой, то получится правильная пирамида, вписанная в шар радиуса R с плоским углом при вершине боковой грани 2α. Требуется определить боковое ребро AC этой пирамиды. Если провести диаметр AF через центр D основания и конец F его соединить с точкой C, то получится прямоугольный треугольник. Поэтому, приняв $AC = x$, получим

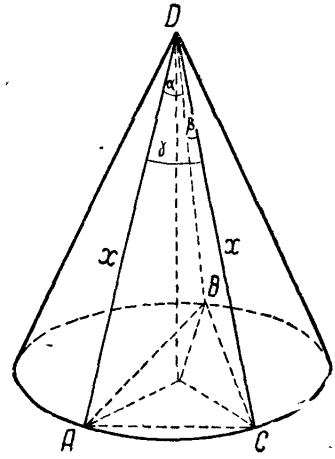


Рис. 238

$$x^2 = AF \cdot AD = 2R\sqrt{AC^2 - CD^2} = 2R\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{3}CL\right)^2} =$$

$$= 2R\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot CB\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2R\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}AC\sin\alpha\right)^2} =$$

$$= 2R\sqrt{x^2 - \left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\sin\alpha\right)^2} = \frac{4Rx}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2\alpha}.$$

Итак,

$$x=\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\alpha}=\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin^2 60^\circ-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\cos 2\alpha-\cos 120^\circ}{2}}=\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

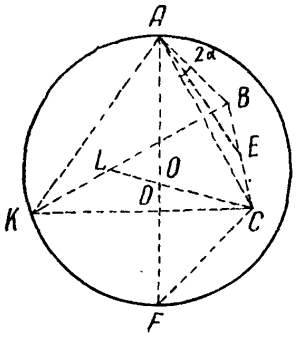


Рис. 239

1018. Многогранник, объем V которого нужно найти, есть пирамида. Вершины M, N, P, Q (рис. 240) ее основания находятся на апофемах пирамиды. Чтобы это доказать, проведем плоскость через высоту AO пирамиды и радиус OP полушара, где P — точка касания шара с гранью ACD. Так как AO перпендикулярна к плоскости основания пирамиды, а OP — к плоскости боковой грани, то проведенная плоскость будет перпендикулярна к обеим этим плоскостям, а следовательно, и к линии CD их пересечения. А это значит, что линия AB, являющаяся линией пересечения проведенной плоскости с гранью CAD, перпендикулярна CD, т. е. AB, на

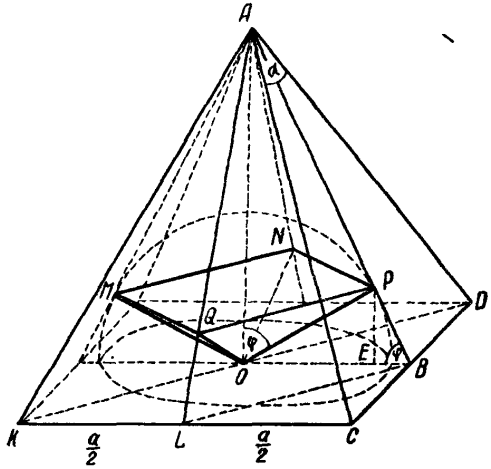


Рис. 240

которой находится точка касания P, есть апофема. Объем $V=\frac{1}{3}PQ^2\cdot PE$. Для определения PQ заметим, что $\triangle APQ\sim\triangle ABL$ и поэтому $\frac{PQ}{LB}=\frac{AP}{AB}$. Но $LB=\frac{1}{2}KD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, а для определения $\frac{AP}{AB}$ положим $\angle AOP=\angle PBE=\varphi$, после чего получим:

$$AP = AO\sin\varphi = AB\sin^2\varphi,\quad \frac{AP}{AB} = \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi =$$

$$= 1 - \left(\frac{OB}{AB}\right)^2 = 1 - \left(\frac{BD}{AB}\right)^2 = 1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом,

$$PQ = LB\cdot\frac{AP}{AB} = \frac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}},\quad \text{а}\quad PE = PB\sin\varphi =$$

$$= OB\cos\varphi\sin\varphi = \frac{a}{2}\cdot\frac{OB}{AB}\sin\varphi = \frac{a}{2}\cdot\frac{BD}{AB}\sin\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a^3\cos^2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{12\cos^6\frac{\alpha}{2}}.$$

1019. Спроектируем трапецию $ABCD$ (рис. 241) на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. В плоскости проекций получим трапецию $A_1B_1C_1D_1$. Так как в нее вписывается окружность и она тоже равнобедренная, то $B_1C_1 = \frac{A_1B_1 + C_1D_1}{2} = \frac{a+b}{2}$, потому что $A_1B_1 = AB = b$ и $C_1D_1 = CD = a$. Подсчитаем высоту трапеции: $A_1E = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$. Отсюда $\sin x = \frac{\sqrt{ab}}{h}$, где x — искомый угол. При этом должно быть $ab \leqslant h^2$.

1020. Соединим середину L отрезка AB (рис. 242) с серединой M отрезка CD. Отрезок LM является общей медианой равнобедренных и равных между собой треугольников CLD и AMB. Поэто-

му LM есть общий перпендикуляр к ребрам AB и CD тетраэдра. Найдем его длину: $LM = \sqrt{BM^2 - BL^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Проведем через ребро CD плоскость, перпендикулярную оси

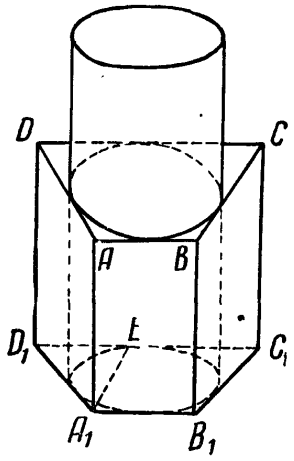


Рис. 241

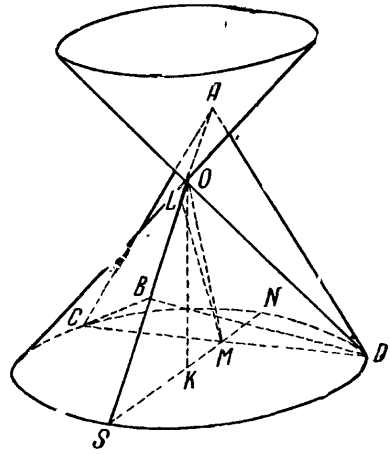


Рис. 242

конуса. Так как осевое сечение конуса есть две взаимно перпендикулярные прямые, то угол между проведенной плоскостью и образующей AB равен 45°. Поэтому $LS = LM = \frac{a}{\sqrt{2}}$, а $SM = LM\sqrt{2} = a$. Но $CM^2 = SM \cdot MN$ или $\frac{a^2}{4} = a \cdot MN$. Отсюда: $MN = \frac{a}{4}$;

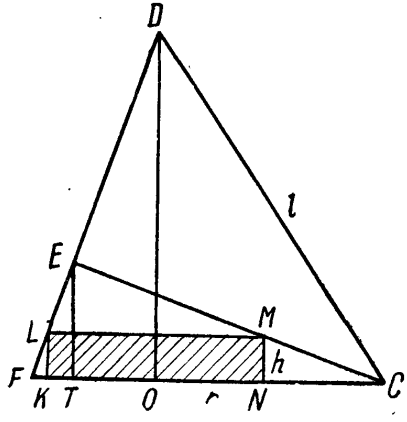


Рис. 243

$OK = SK = \frac{1}{2}(SM + MN) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{4}\right) = \frac{5}{8}a$, $OK \perp SM$; $KM = KN - MN = SK - MN = \frac{5}{8}a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{8}a$. Следовательно, $OM = \sqrt{OK^2 + KM^2} = \frac{a\sqrt{34}}{8}$.

1021. Пусть CDF (рис. 243) есть сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через его вы-

соту DO и боковое ребро DC, а заштрихованный прямоугольник $KLMN$ — соответствующий разрез цилиндра, объем V которого требуется определить. Здесь $CD = l$, а $CF = DF = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, как высоты граней правильного тетраэдра. Обозначим высоту цилиндра $MN = h$, а радиус основания $ON = r$. Из подобия треугольников ECT и MNC получим

$$NC : MN = TC : ET \text{ или } \frac{OC - r}{h} = \frac{TC}{TE}. \qquad (*)$$

Но

$$OC = \frac{2}{3}CF = \frac{\sqrt{3}}{3}l; \quad ET^2 = FT \cdot TC \ (\triangle FEC \text{ — прямоугольный});$$

$$FT = \frac{FE^2}{FC} = \frac{\left(\frac{1}{3}FC\right)^2}{FC} = \frac{1}{9}FC = \frac{\sqrt{3}}{18}l; \quad TC = FC - FT =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}l - \frac{\sqrt{3}}{18}l = \frac{4\sqrt{3}}{9}l; \quad ET = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{18}l \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9}l} = \frac{\sqrt{6}}{9}l.$$

Поэтому равенство (*) можно записать так:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l - r\right)\frac{\sqrt{6}}{9}l = h \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9}l$ или $h + \frac{1}{2\sqrt{2}}r = \frac{1}{2\sqrt{6}}l$. Из подобия треугольников LKF и ETF найдем $FK : KL = FT : ET$ или $\frac{OF - r}{h} = \frac{FT}{ET}$. Но $OF = \frac{1}{3}FC = \frac{\sqrt{3}}{6}l$, поэтому получим: $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}l - r\right)\frac{\sqrt{6}}{9}l = h \cdot \frac{\sqrt{3}}{18}l$; $h + 2\sqrt{2}r = \frac{2}{\sqrt{6}}l$. Решив систему $h + \frac{1}{2\sqrt{2}}r = \frac{1}{2\sqrt{6}}l$; $h + 2\sqrt{2}r = \frac{2}{\sqrt{6}}l$, найдем, что $r = \frac{\sqrt{3}}{7}l$, а $h = \frac{\sqrt{6}}{21}l$.

Отсюда

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{7}l\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{21}l = \frac{\pi\sqrt{6}}{343}l^3.$$

1022. Соединим центр окружности C (рис. 244) с серединой D хорды AB отрезком прямой, а также соединим точку D с вершиной конуса E. Так как $CD \perp AB$, а $\operatorname{tg} \angle DEC = \dfrac{CD}{EC}$, то отсюда видно, что $\angle DEC$ — наименьший из всех углов, которые образует прямая EC с различными прямыми, проведенными в данной плоскости через вершину E. Следовательно, прямая ED есть проекция прямой EC на эту плоскость и $\angle DEC = \varphi$. Учитывая это, найдем длины отрезков ED и AB, после чего искомую площадь S можно будет легко вычислить. Имеем:

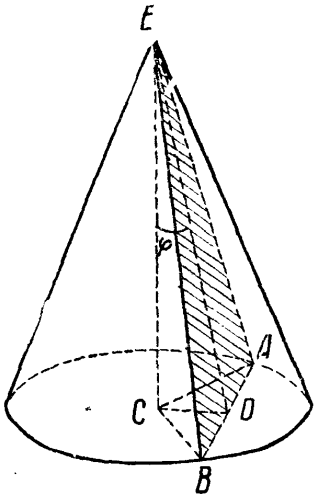


Рис. 244

$$ED = \frac{CE}{\cos\varphi} = \frac{R \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi};$$

$$AB = 2 \cdot AD = 2\sqrt{AC^2 - CD^2} =$$

$$= 2\sqrt{R^2 - (CE \cdot \operatorname{tg}\varphi)^2} =$$

$$= 2\sqrt{R^2 - (R\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi)^2} =$$

$$= 2R\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\varphi - \sin^2\alpha\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{2R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot ED =$$

$$= \frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha\cos^2\varphi}\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}.$$

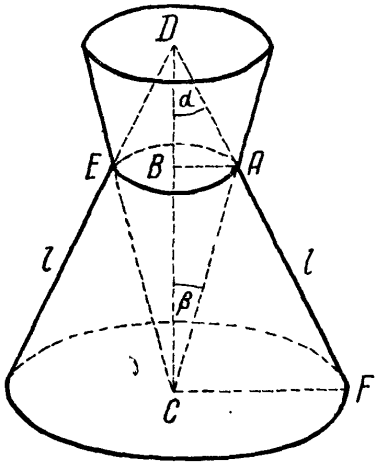


Рис. 245

1023. Искомый объем V равен сумме объемов конусов ADE и ACE (рис. 245). Поэтому $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \times BD + \dfrac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot BC = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \times (DB + BC) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot DC$. Но $DC = DF \cdot \cos\alpha = l\cos\alpha$. С другой стороны, $DC = DB + BC = AB\operatorname{ctg}\alpha + AB\operatorname{ctg}\beta$ или $l\cos\alpha = AB \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = AB \cdot \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Отсюда $AB = \dfrac{l\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Подставив найденные значения AB и DC в формулу объема, получим $V = \dfrac{\pi l^3\cos^3\alpha\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}$.

1024. На рис. 246 изображено осевое сечение тела вращения (заштрихованная фигура). Искомый объем V равен разности между

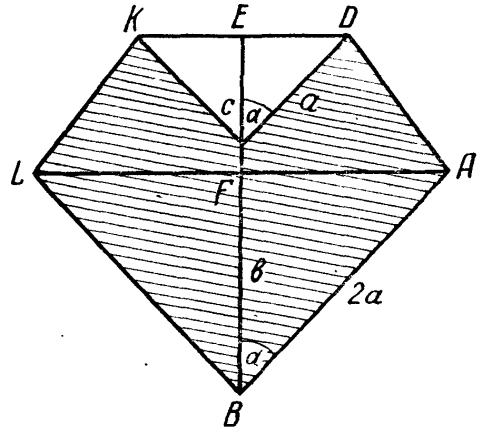


Рис. 246

суммой объемов конуса ABL и усеченного конуса $LKDA$ и объемом конуса DCK. Поэтому

$$V = \frac{\pi}{3}[AF^2\cdot BF + (AF^2 + AF\cdot DE + DE^2)\cdot EF - DE^2\cdot EC] =$$

$$= \frac{\pi}{3}[AF^2\cdot(BF+FE) + DE^2\cdot(FE-EC) + AF\cdot DE\cdot EF] =$$

$$= \frac{\pi}{3}(AF^2\cdot BE + DE^2\cdot FC + AF\cdot DE\cdot EF) = \frac{\pi}{3}[AF^2\cdot(BC+CE) +$$

$$+ DE^2\cdot(BC-FB) + AF\cdot DE\cdot(BC+CE-BF)] =$$

$$= \frac{\pi}{3}[(2a\sin\alpha)^2(b + a\cos\alpha) + (a\sin\alpha)^2(b - 2a\cos\alpha) +$$

$$+ 2a\sin\alpha\cdot a\sin\alpha(b + a\cos\alpha - 2a\cos\alpha)] = \frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{3}(4b + 4a\cos\alpha +$$

$$+ b - 2a\cos\alpha + 2b - 2a\cos\alpha) = \frac{7\pi a^2 b\sin^2\alpha}{3}.$$

1025. $V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3}AD\cdot CD\sin\beta\cdot OM = \dfrac{1}{3}CD^2\cdot OM\sin\beta$

(рис. 247). Но $MO = ML \sin\alpha = a\sin\alpha$, $CD = \frac{CK}{\sin\beta} = \frac{EF}{\sin\beta} = \frac{2 \cdot OL}{\sin\beta} = \frac{2 \cdot LM\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{2a\cos\alpha}{\sin\beta}$. Таким образом,

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{2a\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^2 \cdot a\sin\alpha\sin\beta = \frac{2a^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3\sin\beta}.$$

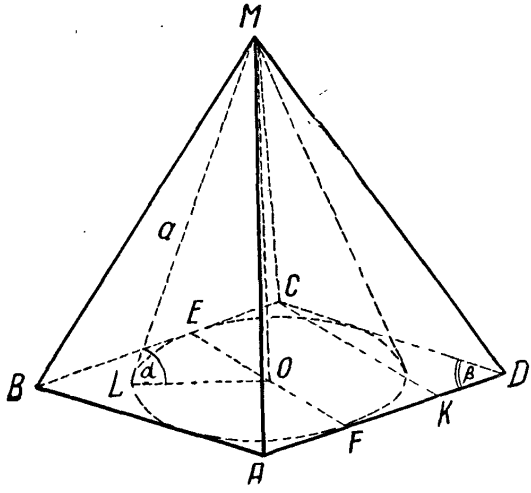


Рис. 247

1026. Обозначим радиус основания конуса буквой r, а его образующую — l (рис. 248). Боковая поверхность конуса образующими MK, ML и MN, по которым касаются коническая поверхность и описанная вокруг конуса пирамида, делится на части $\frac{5}{18}\pi rl$, $\frac{6}{18}\pi rl$ и $\frac{7}{18}\pi rl$. Отсюда видно, что $\smile KL = \frac{10}{18}\pi r$, $\smile LN = \frac{12}{18}\pi r$, $\smile NK = \frac{14}{18}\pi r$ и, следовательно, $\smile KL : \smile LN : \smile NK = 5:6:7$, так что $\angle KOL = 100°$, $\angle LON = 120°$, $\angle NOK = 140°$. Обозначим площади частей боковой поверхности пирамиды, на которые ее делят образующие MK, ML, MN, через S_1, S_2, S_3. Очевидно, $S_1 = 2 \cdot S_{MCL} = CL \cdot l = OL \cdot \operatorname{tg}\angle LOC \cdot l = rl\operatorname{tg}50°$ и аналогично $S_2 = rl\operatorname{tg}60°$, $S_3 = rl\operatorname{tg}70°$. Итак, имеем $S_1 : S_2 : S_3 = rl\operatorname{tg}50° : rl\operatorname{tg}60° : rl\operatorname{tg}70° = \operatorname{tg}50° : \operatorname{tg}60° : \operatorname{tg}70°$.

1027. Приведенный в тексте решения рис. 249 не соответствует действительности. Однако это искажение позволяет лучше подметить нужные для решения зависимости. Пусть SO и SO_1 — вы-

соты двух смежных конусов; SK и SL — их образующие, по которым они касаются плоскости, и точки A и B — проекции центров O и O_1 на эти образующие. Точка M есть точка пересечения ли-

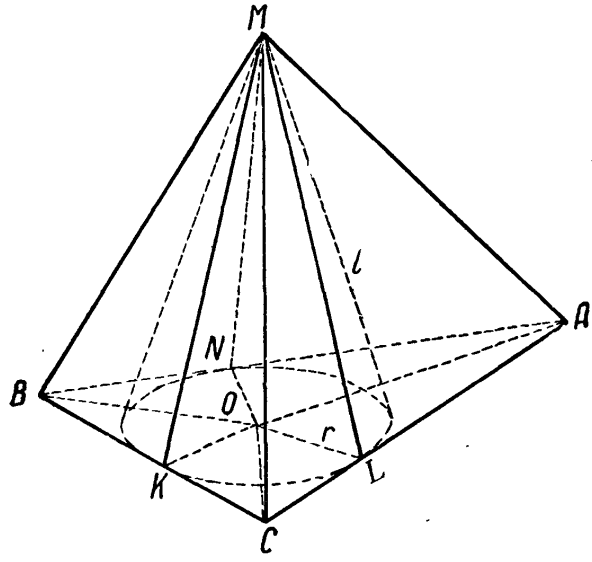


Рис. 248

нии OO_1 с образующей, по которой эти конусы касаются. Очевидно, $\angle OMS = 90°$. Из $\triangle OMS$ находим $AB = OO_1 = 2 \cdot OM = 2 \cdot OS \cdot \sin \angle OSM = 2 \cdot OS \cdot \sin \frac{x}{2}$, где x — искомый угол. Из

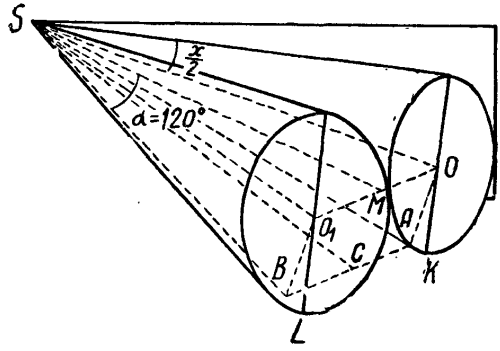


Рис. 249

$\triangle ASC$ находим $AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot SA \cdot \sin 60° = 2 \cdot SO \cdot \cos \frac{x}{2} \times$ $\times \sin 60°$. Сравнивая, находим: $2 \cdot OS \cdot \sin \frac{x}{2} = 2 \cdot OS \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \sin 60°$, $\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \cdot \sin 60°$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sin 60°$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1028. Как видно из рис. 250, искомый объем

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2\cdot KF+\frac{1}{3}\pi\cdot FD^2\cdot AF-\frac{1}{3}\pi\cdot FD^2\cdot OF=$$

$$=\frac{\pi}{3}[2r^2\cdot KF+FD^2\cdot(AF-OF)]=\frac{\pi}{3}(2r^2\cdot KF+FD^2\cdot r)=$$

$$=\frac{\pi r}{3}(2r\cdot KF+FD^2),$$

где $r=\frac{h}{2}$; $KF=KD\cdot\sin\alpha=2r\sin^2\alpha=h\sin^2\alpha$; $FD=OD\cdot\sin 2\alpha=$

$$=r\sin 2\alpha=\frac{h}{2}\sin 2\alpha.$$ Отсюда

$$V=\frac{\pi h}{6}\left(h^2\sin^2\alpha+\frac{h^2}{4}\sin^2 2\alpha\right)=\frac{\pi h^3}{6}(1+\cos^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha.$$

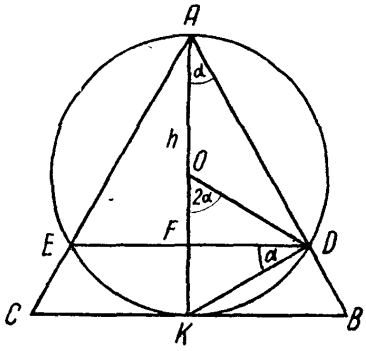


Рис. 250

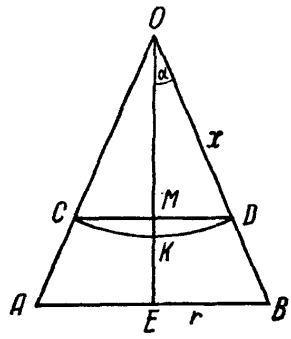


Рис. 251

1029. Пусть искомый радиус есть $x=OD$ (рис. 251), объем конуса V_1 и объем шарового сектора, заключенного внутри конуса, V_2. По условию $V_1=2V_2$. Выразим V_1 и V_2 через r, α и x. Получим:

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot OE=\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{ctg}\alpha;\quad V_2=\frac{2}{3}\pi x^2\cdot KM=$$

$$=\frac{2}{3}\pi x^2\cdot(OK-OM)=\frac{2}{3}\pi x^2\cdot(x-x\cos\alpha)=$$

$$=\frac{2}{3}\pi x^3\cdot(1-\cos\alpha)=\frac{4}{3}\pi x^3\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Подставим найденные значения для V_1 и V_2 в равенство $V_1 = 2V_2$. Это даст $\frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{3}\pi x^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Отсюда:

$$x^3 = \frac{r^3 \operatorname{ctg}\alpha}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}};\quad x = \frac{r}{2}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

1030. Проведем плоскость через высоту MC (рис. 252) и апофему ME пирамиды. Образовавшиеся при этом треугольники MCE и MDO подобны. Из их подобия находим, что $CE : OD = ME : MO$

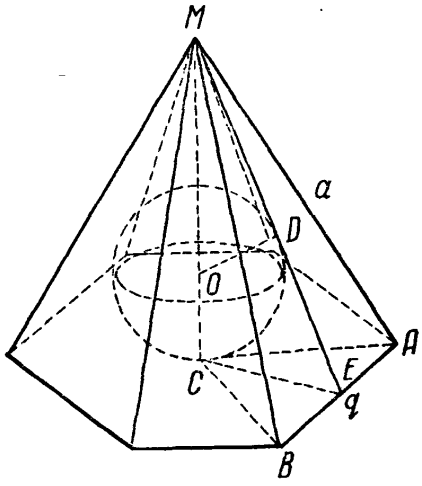


Рис. 252

Но $CE = BE \cdot \operatorname{ctg} \angle ECB = \frac{q}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$; $OD = R$ (неизвестный);

$$ME = \sqrt{MB^2 - BE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}q^2};\ MC = \sqrt{ME^2 - CE^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{4}q^2\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}q^2\operatorname{cosec}^2\frac{180^\circ}{n}} =$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{q^2}{4}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}} = \frac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\cdot\sqrt{4a^2\sin^2\frac{180^\circ}{n} - q^2};$$

$$MO = MC - CO = MC - R.$$

Из предыдущей пропорции имеем:

$$\frac{CE}{R} = \frac{ME}{MC - R};\ CE \cdot (MC - R) = ME \cdot R;$$

$$R=\frac{CE\cdot MC}{CE+ME}=\frac{q\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}\sqrt{4a^2\sin^2\dfrac{180^\circ}{n}-q^2}}{2\left(q\cos\dfrac{180^\circ}{n}+\sqrt{4a^2-q^2}\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{n}\right)}.$$

1031. Проведем высоту CB и апофему CK пирамиды и соединим их концы B и K (рис. 253). В полученном $\triangle CBK$ $\angle CKB=\angle COF=\alpha$ в силу перпендикулярности сторон. Проведем диагональ LD основания и соединим точку D с концом E диаметра CE. Из прямоугольного $\triangle CDE$ получаем

$$BD^2=CB\cdot BE.\ \text{Но}\ BD=\frac{1}{2}LD=\frac{1}{2}\sqrt{AD^2+AL^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\sqrt{2}\cdot DK=\sqrt{2}\cdot BK=\sqrt{2}\cdot CB\cdot\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\sqrt{2}\cdot h\cdot\operatorname{ctg}\alpha;\ CB=h,\ BE=2R-h.$$

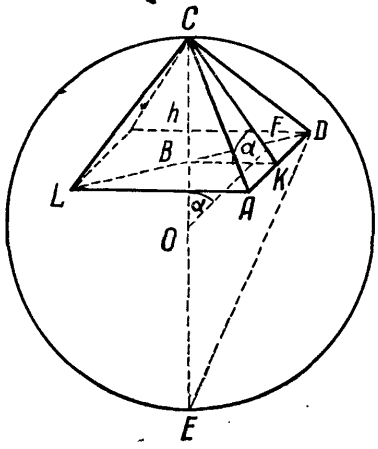


Рис. 253

Теперь получим:

$$2h^2\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha=h(2R-h);\ R=$$

$$=\frac{h}{2}(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha);\ V=\frac{4}{3}\pi\cdot R^3=$$

$$=\frac{1}{6}\pi h^3(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha)^3.$$

1032. Возьмем осевое сечение конуса ABC (рис. 254). Пусть искомый $\angle BCD=x$. Соединив центр O шара с концом C образующей BC и его же с точкой касания F шара и образующей BC конуса, видим, что $\angle BOF=\angle BCD=x$ (перпендикулярность сторон) и $\angle OEF=\angle BCD=x$ (как соответственные). По условию задачи $V_2=\frac{1}{2}V_1$, где V_1 — объем данного конуса, а V_2 — объем отсеченного плоскостью конуса со стороны вершины данного. Обозначив радиус шара буквой r, выразим объемы V_1 и V_2 через r и угол x. Находим:

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot CD^2\cdot BD=\frac{\pi}{3}(OD\cdot\operatorname{ctg}\angle OCD)^2\cdot CD\cdot\operatorname{tg}\angle BCD=$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}\cdot r\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}x=\frac{\pi}{3}\cdot r^3\cdot\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}x;$$

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \cdot OE^2 \cdot OB = \frac{\pi}{3}\left(\frac{OF}{\sin \angle FEO}\right)^2 \cdot \frac{OF}{\cos \angle BOF} = \frac{\pi r^3}{3\sin^2 x \cos x}.$$

Подставляя найденные значения V_1 и V_2 в равенство $V_2 = \frac{1}{2} V_1$, получаем:

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \operatorname{tg} x, \quad \sin^2 x \cos x \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \operatorname{tg} x = 2,$$

$$\sin^3 x \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} = 2, \quad \sin x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sqrt[3]{2},$$

$$2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \sqrt[3]{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}},$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad \frac{x}{2} = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad x = 2\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

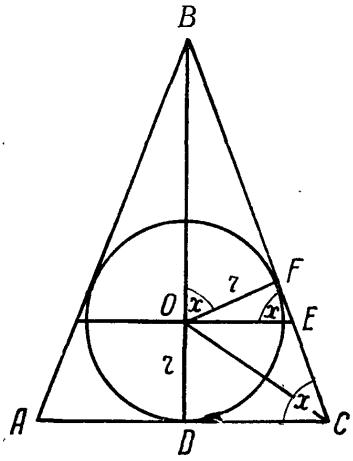


Рис. 254

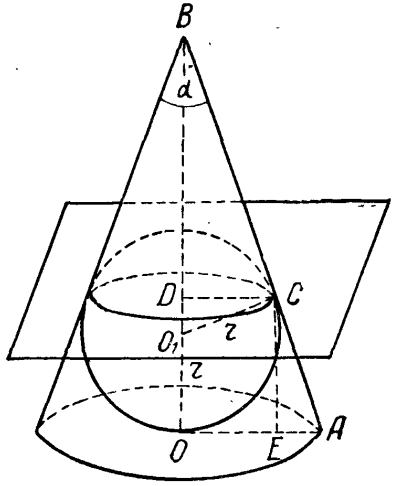


Рис. 255

1033. Пусть BO (рис. 255) есть высота конуса. Она проходит через центр O_1 шара и центр O основания конуса. Опустим перпендикуляр CD из точки C касания шара с образующей AB на высоту BO и центр O_1 шара соединим прямой с точкой C. Получившийся при этом $\angle DCO_1 = \angle ABO = \frac{\alpha}{2}$ (в силу перпендикулярности сторон). Опустим из точки C перпендикуляр CE на пло-

скость основания конуса. При этом получим, что $\angle ACE = \angle ABO = \frac{\alpha}{2}$ (соответственные). Искомый объем

$$V = \frac{1}{3}\pi (CD^2 + CD \cdot OA + OA^2) \cdot DO.$$

Определим входящие сюда отрезки:

$$CD = O_1C \cdot \cos \angle DCO_1 = r \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$DO = DO_1 + O_1O = O_1C \cdot \sin \angle DCO_1 + r = r\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$OA = AC = \frac{CE}{\cos \angle ACE} = \frac{DO}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{r\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Подставляя найденные величины в выражение объема, получаем

$$V = \frac{\pi}{3}\left[\left(r \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 + r \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{r\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{r^2\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}\right] r\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi r^3\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{3} \times$$

$$\times \left[1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 1 + \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2\left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} + 1 + \frac{1}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \frac{3 - 3\sin \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)} \cdot \left(3 - 3\sin\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

1034. По теореме синусов имеем $AB = 2R\sin \angle ACB = 2R \cdot \sin(180^\circ - 2\varphi) = 2R \cdot \sin 2\varphi$ (рис. 256). Высота пирамиды $CD = AD \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2} AB \cdot \operatorname{tg}\varphi = R\sin 2\varphi \operatorname{tg}\varphi$.

Поэтому искомый объем

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{6} AB \cdot EF \cdot \sin\alpha \cdot CD = \frac{1}{6} AB^2 \cdot \sin\alpha \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 4R^2 \cdot \sin^2 2\varphi \sin\alpha \cdot R \cdot \sin 2\varphi \operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} R^3 \cdot \sin^3 2\varphi \operatorname{tg}\varphi \sin\alpha.$$

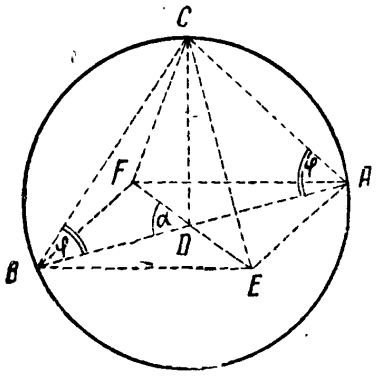


Рис. 256

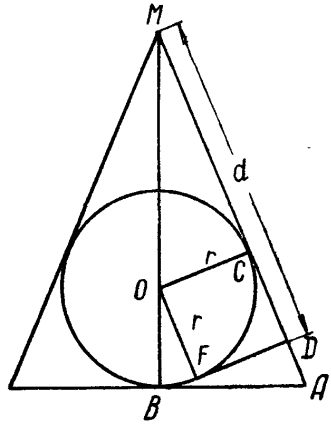


Рис. 257

1035. На рис. 257 изображено сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса и ту его образующую, к которой перпендикулярна касательная к шару плоскость. Следу этой плоскости на рисунке соответствует прямая DF. Соединим центр шара O с точкой касания C шара и образующей MA и его же с точкой касания F шара с построенной плоскостью. Очевидно, четырехугольник $COFD$ есть квадрат со стороной r. Высота конуса

$$MB = OB + OM = OB + \sqrt{OC^2 + CM^2} = OB +$$

$$+ \sqrt{OC^2 + (MD - CD)^2} = r + \sqrt{r^2 + (d-r)^2}.$$

Радиус основания конуса AB определится из подобия треугольников ABM и OCM (прямоугольные, имеющие общий угол AMB). Имеем:

$$AB : OC = MB : MC;\ AB = OC \cdot \frac{MB}{MC} = r \cdot \frac{r + \sqrt{r^2 + (d-r)^2}}{d-r}.$$

Таким образом, объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot MB = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{\left[r + \sqrt{r^2 + (d-r)^2}\right]^3}{(d-r)^2}.$$

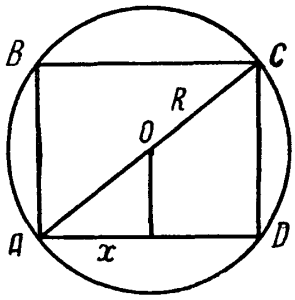


Рис. 258

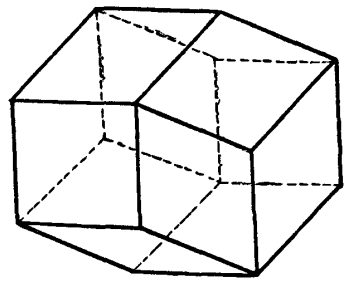


Рис. 259

Замечание. Возможна и другая касательная плоскость, кроме изображенной на рисунке. Она отстоит от построенной на расстояние, равное $2r$. В этом случае объем конуса

$$V = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{\left[r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2}\right]^3}{(d+r)^2}.$$

1036. Возьмем осевое сечение цилиндра (рис. 258). Обозначая радиус цилиндра буквой x, а объем буквой y, можем написать $y = \pi x^2 \cdot CD$. Но из прямоугольного треугольника CDA находим, что

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{4R^2 - 4x^2} = 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Отсюда получаем формулу

$$y = 2\pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2}.$$

1037. Можно, но тогда придется отнести к призмам также такие многогранники, которые не принято называть призмами. Например, ромбический додекаэдр (рис. 259).

Шахно Константин Устинович
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Изд. 5-е, стереотипное.

Редактор *Молчанова А. К.* Худож. редактор *Валентович В. Н.* Техн. редактор *Моргунова Г. М.* Корректор *Гресик Е. Г.*

Подписано к печати с матриц 2/IV 1969 г. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Типогр. № 3. Печ. л. 39. Уч.-изд. л. 29,7. Тип. зак. 1650. Тираж 50 000 экз. Цена 95 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Редакция физико-математической литературы. Минск, ул. Кирова, 24.

Полиграфкомбинат им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Минск, ул. Красная, 23.

УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА ИЗДАТЕЛЬСТВА «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»

ПО ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

Вышли в 1968 году

Вейник А. И. **Термодинамика.** Изд. 3-е, исправл. и дополн. 22,76 л. 93 коп.

Адзерихо С. Я. и др. **Введение в линейную алгебру, теорию поля и ряды Фурье.** 8,2 л. 23 коп.

Гурский Е. И., Ершова В. В. **Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия.** Изд. 2-е, исправл. и дополн. 20,12 л. 66 коп.

Матвеев Н. М. **Дифференциальные уравнения.** 23,3 л. 80 коп.

Турецкий А. Х. **Теория интерполирования в задачах.** 15,85 л. 70 коп.

Тышкевич Р. И., Феденко А. С. **Линейная алгебра и аналитическая геометрия.** 30,42 л. 1 руб.

Заказы на эти книги направляйте по адресу: г. Минск, пл. Свободы, 19. Магазин «Книга — почтой». Заказы выполняются наложенным платежом.

О содержании и оформлении этих книг просим сообщать издательству: г. Минск, ул. Кирова, 24. Издательство «Вышэйшая школа».